UNIVERSITÀ STUDI DI UDINE

Scuola Superiore

Tesina di fine anno

La logica del primo ordine nella Teoria delle Categorie

RELATORE:
Prof. Miculan Marino
TUTOR:
Prof. Corvaja Pietro
CORRELATORE: Dott. Castelnovo Davide

STUDENTE:
Mignani Michele

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Introduzione

Nel 1942 Saunders Mac Lane e Samuel Eilenberg, i fondatori della teoria delle categorie, scrivevano: *"It should be observed first that the whole concept of a category is essentially an auxiliary one; our basic concepts are essentially those of a functor and of a natural transformations [...]"*. Tale affermazione può essere considerata il manifesto di questa disciplina che cerca di descrivere strutture matematiche astraendo il più possibile dalle loro proprietà accidentali. L'approccio categoriale mira a cogliere l'essenza di un oggetto matematico, le caratteristiche salienti di una costruzione per mezzo delle "relazioni" che questi hanno con altre strutture esistenti. Detto ciò, è comprensibile la cruciale importanza dei funtori e delle trasformazioni naturali di cui parlano Mac Lane ed Eilenberg.

Proprio per questo tentativo di astrarre il più possibile dal contesto contingente in cui una struttura può trovarsi, la teoria delle categorie non può ascriversi a nessun ambito particolare della matematica. È una disciplina trasversale che sottostà a tutte le altre. A provare ciò, contribuisce sicuramente la visione di alcuni logici che individuano nella teoria delle categorie un ottimo sostituto a quella insiemistica per questioni di fondazione della matematica. Il primo tentativo venne attuato tra il 1964 e il 1970, quando Lawvere cercò di formulare in termini categoriali la logica del primo ordine.

L'intento di questo lavoro è duplice. Il primo capitolo e la prima metà del secondo vogliono mostrare come effettivamente sia possibile interpretare la logica del primo ordine nella teoria delle categorie per mezzo della struttura di fibrazione, abbandonando l'approccio originario di Lawvere e prediligendo quello di Jacobs e Makkai. In particolare si vede come la logica del primo ordine dia vita ad una struttura categoriale con determinate caratteristiche algebriche (c-po-fibrazione). Infine si danno nuove dimostrazioni dei teoremi classici della logica (correttezza e completezza) per mezzo di enunciati categoriali equivalenti. Questi interessano non solo *la* fibrazione che nasce dalla logica, ma *tutta* la classe delle strutture ad essa simili.

Nel lavoro trattiamo soltanto con la logica coerente, ovvero il frammento comune alla logica classica e intuizionistica che contiene solo le regole per $\wedge$, $\vee$, $\top$, $\bot$ e $\exists$. Diamo, inoltre, per note le definizioni e le costruzioni principali della teoria dei tipi e delle categorie (i.e. categoria, funtore, trasformazione naturale, prodotto, coprodotto, pullback, ...) e usiamo le seguenti notazioni:

- ogni categoria $\mathbb{B}$ verrà assunta localmente piccola. Dato un suo oggetto A, indichiamo con $\mathbb{B}(A, -)$ il funtore rappresentabile $\mathbb{B} \to \mathbf{Set}$. Esso associa ad un elemento B, l'insieme dei morfismi in $\mathbb{B}$ tra A e B e ad ogni freccia $f : B \to B'$ una funzione $\mathbb{B}(A, B) \to \mathbb{B}(A, B')$ che manda $g : A \to B$ in $fg : A \to B'$;

- se la categoria $\mathbb{B}$ ha un oggetto terminale (iniziale) lo indicheremo con $\mathbf{1}_{\mathbb{B}}$ ($\mathbf{0}_{\mathbb{B}}$). Nel caso $\mathbb{B}$ sia **Set** spesso gli oggetti terminali e iniziali verranno indicati rispettivamente con $\{*\}$ e $\emptyset$. Sia A un oggetto di $\mathbb{B}$, denoteremo con $!_A$ l'unica freccia $A \to \mathbf{1}_{\mathbb{B}}$;

- dato un funtore $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$, l'immagine tramite p di un oggetto X in $\mathbb{E}$ verrà indicata di solito con pX quando questo non creerà confusione. Altrimenti si userà la notazione con le parentesi $p(X)$. Analogamente per le frecce in $\mathbb{E}$.

- il sequente logico $\Theta \vdash \varphi$ indicherà che dalle formule in Θ è possibile dedurre φ;

- data una formula φ, $\varphi\{y/x\}$ indicherà la formula che si ottiene sostituendo tutte le occorrenze libere della variabile y con x. Con $\varphi\{\vec{y}/\vec{x}\}$ indicheremo la sostituzione simultanea delle occorrenze libere di $\vec{y} = (y_1, \ldots y_n)$ con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Tali notazioni verranno applicate anche per insiemi di formule Θ, ovvero $\Theta\{y/x\}$ indicherà l'insieme costituito da $\vartheta\{y/x\}$ per ogni $\vartheta \in \Theta$;

1 Fibrazioni

1.1 Definizione e primi esempi

Iniziamo il capitolo con la definizione di fibrazione, struttura categoriale che risulterà estremamente utile per trattare la logica del primo ordine.

Definizione 1.1 (Fibrazione)**.** Sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ un funtore.

- Un oggetto X di $\mathbb{E}$ è *sopra* un oggetto A di $\mathbb{B}$ se $pX = A$; un morfismo $z : X \to Y$ in $\mathbb{E}$ è sopra $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$ se $pz = f$;
- Un morfismo $z : X \to Y$ in $\mathbb{E}$ è *cartesiano* se per ogni $g : Z \to Y$ in $\mathbb{E}$ tale che $p(g) = p(z)w$ per qualche $w : pZ \to A$ esiste un'unica freccia $h : Z \to X$ sopra w tale che $g = zh$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\exists!\ h"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
& X \arrow[r, "z"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "pz"] & B \\
pZ \arrow[ur, "w"] \arrow[urr, "p(g)=p(z)w"'] & &
\end{tikzcd}$$

- Il funtore $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ è una *fibrazione* se per ogni $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$ e per ogni Y in $\mathbb{E}$ sopra B, c'è un morfismo cartesiano $z : X \to Y$ in $\mathbb{E}$ sopra f per un appropriato X sopra A. In tal caso z prende il nome di *sollevamento cartesiano* di f.

Facciamo subito alcune semplici osservazioni, utili per comprendere meglio la definizione precedente.

Osservazione 1.1.

a) Sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una fibrazione, sia $z : X \to Y$ una freccia cartesiana sopra $f : A \to B$ e $u : X' \to X$ un isomorfismo in $\mathbb{E}$ *verticale* (ovvero sopra id_A). Allora $zu : X' \to Y$ è ancora una freccia cartesiana sopra f. Vale anche il viceversa, ovvero date due frecce cartesiane sopra f, $z : X \to Y$ e $z' : X' \to Y$, allora esiste un unico isomorfismo verticale $u : X \to X'$ tale che $z = z'u$.

b) Per ogni A oggetto di $\mathbb{B}$ possiamo considerare la categoria $\mathbb{E}^A$ che ha come oggetti gli elementi X di $\mathbb{E}$ sopra A e come frecce morfismi verticali. Indichiamo inoltre, dato $f : A \to B$ morfismo in $\mathbb{B}$, l'insieme delle frecce $X \to Y$ in $\mathbb{E}$ sopra f con $\mathbb{E}_f(X, Y)$.

Consideriamo ora $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$. Per ogni elemento Y di $\mathbb{E}^B$ possiamo scegliere un oggetto X in $\mathbb{E}^A$ che è dominio di una freccia cartesiana sopra f con codominio Y. Questo permette di definire una mappa f^* tra gli oggetti di $\mathbb{E}^A$ e $\mathbb{E}^B$, estendibile anche ai morfismi. Dato $y : Y \to Y'$ sopra id_B, chiamiamo γ_Y e $\gamma_{Y'}$ le frecce cartesiane con codominio Y e Y' e dominio $f^*(Y)$ e $f^*(Y')$. Allora per cartesianità della freccia $\gamma_{Y'}$, poiché $y\gamma_Y : f^*(Y) \to Y'$, esiste un'unica freccia $u : f^*(Y) \to f^*(Y')$ che fa commutare il diagramma seguente.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "y"] & Y' \\
f^*(Y) \arrow[u, "\gamma_Y"] \arrow[r, "u"] & f^*(Y') \arrow[u, "\gamma_{Y'}"']
\end{tikzcd}$$

Poniamo quindi $f^*(y) = u$. Si verifica che, così definito, $f^* : \mathbb{E}^A \to \mathbb{E}^B$ risulta un funtore che prende il nome di *funtore pullback*. Osserviamo che fissato Y, la scelta di X in $\mathbb{E}^A$ come sopra può essere fatta in diversi modi. Questo porta alla definizione di un altro funtore pullback che però risulta naturalmente isomorfo al primo. Mostriamo la seguente proprietà.

Lemma 1.1. *Sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una fibrazione e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due morfismi in $\mathbb{B}$. Allora $(gf)^*$ è naturalmente isomorfo a f^*g^*.*

Dimostrazione. Per ogni $Y \in \mathbb{E}^C$ esiste una freccia cartesiana $\gamma_Y : (gf)^*Y \to Y$. Definiamo $\eta_Y = f^* \circ g^* \circ \gamma_Y$ e dimostriamo che $\eta = (\eta_Y)_{Y \in \mathbb{E}^C}$ è una trasformazione naturale. Sia $u : Y \to Z$ un morfismo in $\mathbb{E}^C$ e proviamo che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
(gf)^*Y \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[d, "(gf)^*u"'] & g^*(f^*Y) \arrow[d, "g^*(f^*u)"] \\
(gf)^*Z \arrow[r, "\eta_Z"'] & g^*(f^*Z)
\end{tikzcd}$$

ovvero che $g^* \circ f^*(u) \circ \eta_Y = g^* \circ f^*(u) \circ f^* \circ g^* \circ \gamma_Y$ e $\eta_Z \circ (gf)^*(u) = f^* \circ g^* \circ \gamma_Z \circ (gf)^*(u)$ sono in realtà lo stesso morfismo. Questo è evidente considerando il diagramma commutativo che nasce dalla definizione dei funtori pullback in figura.

$$
\begin{tikzcd}
(gf)^*Y \arrow[r, "\gamma_Y"] \arrow[d, "(gf)^*u"'] \arrow[dr, phantom, "\%"] & Y \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "\%"] & g^*Y \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "g^*u"] \arrow[dr, phantom, "\%"] & f^*g^*Y \arrow[d, "f^*g^*u"] \\
(gf)^*Z \arrow[r, "\gamma_Z"'] & Z \arrow[r, "g^*"'] & g^*Z \arrow[r, "f^*"'] & f^*g^*Z
\end{tikzcd}
$$

La trasformazione naturale η è un isomorfismo in quanto per ogni Y, η_Y lo è. Il suo inverso nasce componendo la mappa $\gamma^f_Y \circ \gamma^g_{f^*Y} : g^*(f^*Y) \to Y$, dove $\gamma^f_Y : f^*Y \to Y$ e $\gamma^g_{f^*Y} : g^*(f^*Y) \to f^*Y$ sono le frecce cartesiane che nascono da come sono definiti i funtori pullback f^* e g^*, con il funtore $(gf)^*$. $\square$

Proseguiamo vedendo un'utile caratterizzazione delle frecce cartesiane.

Lemma 1.2. *Siano $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una fibrazione, $f : A \to B$ un morfismo in $\mathbb{B}$, $X \in \mathbb{E}^A$, $Y \in \mathbb{E}^B$ e Z oggetto di $\mathbb{E}$. Data $z : X \to Y$, per ogni $g : pZ \to pX = A$ esiste una mappa $z \circ (-)_g : \mathbb{E}_g(Z, X) \to \mathbb{E}_{p(z)g}(Z, Y)$ che ad $u : Z \to X$ sopra g associa zu. z è cartesiana se e solo se per ogni g e Z come sopra, $z \circ (-)_g$ è una biezione.*

Dimostrazione. Supponiamo che z sia una freccia cartesiana. Definiamo la funzione $t : \mathbb{E}_{p(z)g}(Z, Y) \to \mathbb{E}_g(Z, X)$ che a $w : Z \to Y$ sopra $p(z)g$ associa la freccia $q : Z \to X$ sopra g tale che $zq = w$. L'esistenza e l'unicità di tale q è garantita dalla cartesianità di z. Si verifica facilmente che t è la funzione inversa di $z \circ (-)_g$.

Viceversa, supponiamo che $z \circ (-)$ sia una biezione per ogni Z e per ogni $g : pZ \to pX$. Data $w : Z \to Y$ tale che $p(w)$ si fattorizza in $p(z)g$, esiste un'unica freccia $u : Z \to X$ sopra g tale che $w = zu$ e quindi z è cartesiana. $\square$

Corollario 1.3. *Dati $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una fibrazione, un morfismo $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$ e due oggetti Z e Y rispettivamente sopra A e B, si ha*

$$\mathbb{E}^A(Z, f^*(Y)) \cong \mathbb{E}_f(Z, Y).$$

Presentiamo nel seguito, per chiarezza, alcuni esempi di fibrazione e di funtori pullback.

Esempio 1.1.

- *Fibrazione delle famiglie in $\mathbb{B}$*
  Data una categoria $\mathbb{B}$ consideriamo la categoria $\mathbb{B}^{\to}$. Essa ha come oggetti frecce $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$ e un morfismo tra $f : A \to B$ e $g : C \to D$ è una coppia di morfismi (u, v) in $\mathbb{B}$ tali che $u : A \to C$, $v : B \to D$ e il quadrato che si genera commuta (ovvero $vf = gu$). Esiste una mappa

canonica cod : $\mathbb{B}^{\to} \to \mathbb{B}$ che ad un oggetto $f : A \to B$ associa il suo codominio B. Si dimostra che cod è un funtore tra le due categorie e definisce una fibrazione se e solo se $\mathbb{B}$ ammette pullback.

In tal caso, data $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$ e preso un oggetto $g : Y \to B$ sopra B, un funtore pullback è quello che associa a g il morfismo $f^*(g) : f^*(Y) \to A$ che nasce dal seguente pullback in $\mathbb{B}$:

$$\begin{tikzcd} f^*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "f^*(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \quad (1).$$

- *Fibrazione dei predicati in* $\mathbb{B}$
  La categoria totale è $\mathbf{P}(\mathbb{B})$ avente come oggetti le coppie (X, A) con X sotto-oggetto di A (ovvero X è una classe di mono in A) e A in $\mathbb{B}$. Per un'esposizione più dettagliata confrontare [1]. Il funtore che definisce la fibrazione è $\mathrm{Pred}(\mathbb{B}) : \mathbf{P}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ che alla coppia (X, A) associa l'oggetto A. Tratteremo il caso $\mathbb{B} = \mathbf{Set}$, in cui i sotto-oggetti di un dato A possono essere identificati con i suoi sottoinsiemi e la categoria base ammette pullback. Scriveremo per semplicità Pred per indicare $\mathrm{Pred}(\mathbf{Set})$. Visto che tratteremo spesso con questa fibrazione, descriviamone le caratteristiche principali. La categoria totale $\mathbf{P}(\mathbf{Set})$ ha oggetti identificabile con una coppia (X, A) con $X \subseteq A$. Dati due elementi (X, A) e (Y, B) come sopra, una freccia è il dato di due morfismi (g, f) tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{incl}"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{incl}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} .$$

  Osserviamo che fissato $f : A \to B$, g è univocamente determinato. Analizzando la fibra sopra A, si ha quindi che tra due oggetti esiste al più una freccia (quella di inclusione), il che conferisce alla categoria $\mathbf{P}(\mathbf{Set})^A$ una struttura di poset (Cfr. Definizione 1.3) isomorfa a $\mathcal{P}(A)$. Data f e $Y \subseteq B$ come sopra, un funtore pullback associato f^* manda Y in $f^{-1}[Y] \subseteq A$.

- *Generalizzazione della fibrazione dei predicati*
  Nell'esempio precedente, le fibre di un oggetto A sono isomorfe all'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$, cioè $\mathbf{Set}(A, \mathbf{2})$. Pertanto la fibra dell'elemento

terminale della base ($\mathbf{1}_{\mathbf{Set}} \cong \{*\}$) è isomorfa al poset $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ con $0 < 1$. Come vedremo successivamente parlando della fibrazione di Lindenbaum-Tarski, questa caratteristica è strettamente connessa alla possibilità di valutare semanticamente un enunciato in soli due modi: vero o falso. Volendo generalizzare, rimanendo sempre nel frammento coerente della logica del primo ordine, possiamo fare in modo che la fibra sopra l'oggetto terminale sia isomorfa ad un qualsiasi altro reticolo limitato distributivo H. In tal caso otteniamo la fibrazione $\mathrm{Pred}_H(\mathbf{Set})$ in cui la categoria base è sempre $\mathbf{Set}$, ma nella categoria totale gli oggetti sono coppie (A, f) con $f : A \to H$ e una freccia $h : (A, f) \to (B, g)$ è una funzione $h : A \to B$ tale che $f \leq gh$ (ovvero per ogni $x \in A, f(x) \leq gh(x)$, nella struttura di reticolo di H). Data una proiezione prodotto $\pi : A \times B \to A$, il funtore pullback π^* associa ad $f : A \to H$, l'oggetto $f\pi : A \times B \to H$.

1.2 Proprietà di alcune fibrazioni

Discutiamo ora alcune semplici proprietà delle fibrazioni. Iniziamo con la definizione di freccia cocartesiana e successivamente mostriamo un teorema che lega l'esistenza di tali tipi di morfismi ad un'aggiunzione che rivestirà un ruolo centrale nel seguito.

Definizione 1.2. Dato un funtore $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e una freccia $z : X \to Y$ si dice cocartesiana se è cartesiana in $p^{op} : \mathbb{E}^{op} \to \mathbb{B}^{op}$. In particolare per ogni freccia $w : X \to U$ tale che $p(w) = gp(z)$ per un certo $g : pY \to pU$, esiste unica $u : Y \to U$ sopra g tale che $uz = w$.

$$\begin{tikzcd}
U & & \\
& X \arrow[ul, "w"] \arrow[r, "z"] & Y \arrow[ull, dotted, "\exists!"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& pX \arrow[dl, "pw"'] \arrow[r, "pz"] & pY \arrow[dll, "g"] \\
pU & &
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.4. *Sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una fibrazione, $f : A \to B$ una freccia in $\mathbb{B}$ e $f^* : \mathbb{E}^B \to \mathbb{E}^A$ il funtore pullback associato. f^* ha aggiunto sinistro Σ_f se e solo se per ogni $X \in \mathbb{E}^A$, c'è una freccia cocartesiana con dominio X.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $\Sigma_f \dashv f^*$ e $\eta : 1_{\mathbb{E}^A} \Rightarrow f^*\Sigma_f$ l'unità dell'aggiunzione.

Abbiamo la freccia $\eta_X : X \to f^*\Sigma_f X$ che composta con la freccia cartesiana $\gamma_1 : f^*\Sigma_f X \to \Sigma_f X$ porta al morfismo $\delta : X \to \Sigma_f X$ sopra f che mostriamo essere cocartesiano. Sia $z : X \to Z$ una freccia sopra $h = gf$. Allora si ha il seguente fatto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_h(X, Z) &\overset{(1)}{\cong} \mathbb{E}^A(X, h^*Z) \overset{(2)}{\cong} \mathbb{E}^A(X, f^*g^*Z) \\ &\overset{(3)}{\cong} \mathbb{E}^B(\Sigma_f X, g^*Z) \overset{(4)}{\cong} \mathbb{E}_g(\Sigma_f X, Z),\end{aligned}$$

dove il primo isomorfismo e il quarto derivano dal Corollario 1.3, il secondo da $h = gf$ e dal Lemma 1.1, il terzo dall'aggiunzione $\Sigma_f \dashv f^*$. Verifichiamo ora che l'isomorfismo $\mathbb{E}_g(\Sigma_f X, Z) \to \mathbb{E}_h(X, Z)$ equivale alla composizione a destra con δ. Così facendo a z corrisponde un'unica freccia $w : \Sigma_f X \to Z$ tale che $w\delta = z$ e si prova la tesi. Nella figura seguente mostriamo esplicitamente i passaggi che permettono la creazione dell'isomorfismo precedente numerandoli in accordo con l'equazione sopra.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X", "(1)"'] \arrow[rr, bend left, "\delta"] & f^*\Sigma_f X \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "f^*k"', "(1)"] \arrow[dr, phantom, "a)"] & \Sigma_f X \arrow[d, "k"] \arrow[dd, bend left, "w"] \\
& f^*g^*Z \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\varphi"', "(2)"] \arrow[dr, phantom, "b)"] & g^*Z \arrow[d, "\gamma_4"] \\
& h^*Z \arrow[r, "\gamma_3", "(3)"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 indichiamo le generiche frecce cartesiane generate dai funtori pullback considerati. Ripercorriamo ora gli isomorfismi sopra descritti per la mappa $\mathbb{E}_g(\Sigma_f X, Z) \to \mathbb{E}_h(X, Z)$.

Sia data $w \in \mathbb{E}_g(\Sigma_f X, Z)$. Allora per (4) $w = \gamma_4 \circ k$ come in figura. Per (3) otteniamo $f^*k \circ \eta_X : X \to f^*g^*X$ e quindi il morfismo $\varphi \circ f^*k \circ \eta_X : X \to h^*Z$. Infine componendo a sinistra con γ_3 abbiamo la freccia voluta in $\mathbb{E}_h(X, Z)$. Vista la commutatività di a) e di b) dimostriamo quanto voluto, ovvero che

$$\begin{aligned}\gamma_3 \circ \varphi \circ f^*k \circ \eta_X &= \gamma_4 \circ \gamma_2 \circ f^*k \circ \eta_X \\ &= \gamma_4 \circ k \circ \gamma_1 \circ \eta_X \\ &= \gamma_4 \circ k \circ \delta \\ &= w \circ \delta\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Definiamo il funtore $\Sigma_f : \mathbb{E}^A \to \mathbb{E}^B$, come segue:

- **oggetti:** Dato X esiste una freccia cocartesiana con tale oggetto come dominio (nel seguito verrà indicata con δ_X). Poniamo $\Sigma_f X$ il codominio di tale morfismo;
- **morfismi:** data $z : X \to Y$, poiché la freccia $\delta_X : X \to \Sigma_f X$ è cocartesiana, esiste un'unica freccia $u : \Sigma_f X \to Y$ tale che $u\delta_X = z$, che composta con $\delta_Y : Y \to \Sigma_f Y$ porta all'esistenza di un morfismo $\Sigma_f X \to \Sigma_f Y$.

È facile mostrare che effettivamente Σ_f così definito è un funtore ed è l'aggiunto sinistro di f^*. Per quest'ultimo punto esibiamo l'isomorfismo $\mathbb{E}^B(\Sigma_f X, Y) \cong \mathbb{E}^A(X, f^*Y)$. Data $t : \Sigma_f X \to Y$, $t\delta_X : X \to Y$ e per la cartesianità di $\gamma_Y : f^*Y \to Y$, esiste una freccia $s : X \to f^*Y$. Viceversa, data $s : X \to f^*Y$, $\gamma_Y s : X \to Y$ e per la cocartesianità di $\delta_X : X \to \Sigma_f X$, esiste una freccia $t : \Sigma_f X \to Y$.

□

Nel seguito tratteremo casi in cui, data una fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e una freccia $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$, il funtore $f^* : \mathbb{E}^B \to \mathbb{E}^A$ ha un aggiunto sinistro $\Sigma_f : \mathbb{E}^A \to \mathbb{E}^B$. Questo può soddisfare alcune proprietà importanti che elenchiamo.

- **Stabilità o Condizione di Beck-Chevalley**
  Consideriamo il quadrato commutativo a sinistra nella figura sottostante e supponiamo che a^* e b^* abbiano aggiunti sinistri Σ_a e Σ_b. Otteniamo così il quadrato a destra.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ A' \arrow[u, "a"] \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[u, "b"'] \end{tikzcd} \quad (2) \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathbb{E}^A & \mathbb{E}^B \arrow[l, "f^*"'] \\ \mathbb{E}^{A'} \arrow[u, "\Sigma_a"] & \mathbb{E}^{B'} \arrow[l, "f'^*"] \arrow[u, "\Sigma_b"'] \end{tikzcd} \quad (3)$$

Esiste una trasformazione naturale canonica $\eta : \Sigma_a f'^* \Rightarrow f^*\Sigma_b$. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^A(\Sigma_a f'^* X, f^*\Sigma_b X) &\cong \mathbb{E}^{A'}(f'^* X, a^* f^* \Sigma_b X) \\ &\cong \mathbb{E}^{A'}(f'^* X, f'^* b^* \Sigma_b X) \end{aligned}$$

dove il primo isomorfismo deriva dall'aggiunzione $\Sigma_a \vdash a^*$ e il secondo dalla commutatività del quadrato (2). L'unità $id_{\mathbb{E}^{A'}} \Rightarrow b^*\Sigma_b$ permette poi di definire una funzione $\mathbb{E}^{A'}(f'^*X, f'^*X) \to \mathbb{E}^{A'}(f'^*X, f'^*b^*\Sigma_b X)$. Chiamando $\alpha : \mathbb{E}^{A'}(f'^*X, f'^*X) \to \mathbb{E}^{A}(\Sigma_a f'^*X, f^*\Sigma_b X)$, $\alpha(id_{f'^*X})$ è una freccia tra $\Sigma_a f'^*X \to f^*\Sigma_b X$ che rappresenta la X-componente della trasformazione naturale canonica η. Diciamo che Σ_a è stabile in relazione al quadrato (2) (oppure che Σ_a soddisfa la condizione di Beck-Chevalley rispetto al quadrato (2)) se η è un isomorfismo naturale.

- **Reciprocità di Frobenius**
  In questo caso supponiamo che le fibre ammettano prodotti binari e che i funtori pullback li preservino. Siano X sopra A e Y sopra B. Abbiamo una freccia canonica

  $$w : f^*Y \times X \to f^*(Y \times \Sigma_f X)$$

  che nasce come segue. Sia $\eta : id_{\mathbb{E}^B} \Rightarrow f^*\Sigma_f$ la unità dell'aggiunzione $\Sigma_f \dashv f^*$. La mappa w nasce dalla composizione di $id_{f^*Y} \times \eta_X : f^*Y \times X \to f^*Y \times f^*\Sigma_f X$ con l'isomorfismo canonico $f^*Y \times f^*\Sigma_f X \cong f^*(Y \times \Sigma_f X)$ derivante dal fatto che f^* preserva i prodotti. L'aggiunzione fornisce poi la freccia $z : \Sigma_f(f^*Y \times X) \to Y \times \Sigma_f X$. Diremo che Σ_f soddisfa la reciprocità di Frobenius se per ogni scelta di X e Y come sopra, z risulta un isomorfismo.

Riprendiamo gli esempi visti precedentemente e studiamo l'esistenza degli aggiunti sinistri per i funtori pullback in quei casi.

Esempio 1.2.

- *Fibrazione delle famiglie in* **Set**
  Dal momento che la categoria **Set** ammette pullback, il funtore cod(**Set**) definisce effettivamente una fibrazione. Sia $f : A \to B$ in **Set**. Definiamo $\Sigma_f : (\mathbf{Set}^{\to})^A \to (\mathbf{Set}^{\to})^B$ come il funtore che associa al morfismo $g : X \to A$, la funzione $fg : X \to B$. Mostriamo che $\Sigma_f \vdash f^*$ e per farlo troviamo un isomorfismo canonico $(\mathbf{Set}^{\to})^B(\Sigma_f g, h) \cong (\mathbf{Set}^{\to})^A(g, f^*h)$, dove $h : Y \to B$. Sia $u : X \to Y$ una freccia appartenente a $(\mathbf{Set}^{\to})^B(\Sigma_f g, h)$. Poiché $g : X \to A$, per la proprietà universale del pullback nel diagramma in figura, esiste un'unica freccia $v : X \to f^*(Y)$. La mappa che ad u associa v come sopra è biunivoca e costituisce la biezione cercata.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\exists! v"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& f^*(Y) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "h"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

- *Fibrazione dei predicati in* **Set**
  Come osservato nell'Esempio 1.1, data $f : A \to B$, il pullback f^* associa ad $Y \subseteq B$, $f^{-1}[Y] \subseteq A$. Tale funtore ammette un aggiunto sinistro $\Sigma_f : (\mathbf{P}(\mathbf{Set}))^A \to (\mathbf{P}(\mathbf{Set}))^B$ che mappa $X \subseteq A$ in $f[X] \subseteq B$. Si dimostra facilmente infatti che

  $$\mathbf{P}(\mathbf{Set})^A(X, f^*(Y)) \cong \mathbf{P}(\mathbf{Set})^B(\Sigma_f(X), Y)$$

  in maniera canonica.

- $\mathrm{Pred}_H(\mathbf{Set})$
  Dato $\pi : A \times B \to A$, un aggiunto sinistro a π^* è Σ_π che a $y : A \times B \to H$ associa la funzione $\bigvee_{b \in B} y(a, b) : A \to H$. Verificare l'isomorfismo naturale si riduce a vedere che $\Sigma_\pi f \leq g$ se e solo se $f \leq \pi^* g$.

  C'è una stretta analogia tra questo esempio e quello precedente. Scegliendo infatti $H = \mathbf{2}$, una coppia (A, f) può essere identificato con l'insieme $X = \{a \in A \ : \ f(a) = \mathbf{1_2}\} \subseteq A$. Una freccia $h : (A, f) \to (B, g)$ deve verificare che $f \leq gh$, ovvero per ogni a, se $a \in A$, cioè se $f(a) = \mathbf{1_2}$, allora anche $gh(a) = \mathbf{1_2}$. Quindi $h(a) \in Y$, dove Y è il sottoinsieme di B con cui si identifica la coppia (B, g). Il funtore pullback π^* associa ad $X \subseteq A$, l'insieme

  $$\begin{aligned}\{(a, b) \in A \times B \ : \ f\pi(a, b) = \mathbf{1_2}\} &\cong \{(a, b) \in A \times B \ : \ a \in X\} \\ &\cong \pi^{-1}[X] \subseteq A \times B.\end{aligned}$$

  L'aggiunto sinistro, all'insieme $Y \subseteq A \times B$ corrispondente alla coppia $(A \times B, y)$, associa il sottoinsieme X di A costituito da tutti gli elementi $a \in A$ per cui $\bigvee_{b \in B} y(a, b) = \mathbf{1_2}$, ovvero $\pi(Y) = \{a \in A \ : \ \exists b \in B \text{ t.c. } (a, b) \in Y\}$. Anche per $\mathrm{Pred}_H(\mathbf{Set})$ vale la considerazione fatta per l'esempio precedente, ovvero si ha anche qui la possibilità di applicare quanto detto sopra ad una qualsiasi freccia f e non solo alle proiezioni prodotto.

Siamo ora pronti per definire due classi di fibrazioni che rivestiranno nel seguito un ruolo cruciale dal momento che la fibrazione del frammento coerente della logica del primo ordine (Cfr. Capitolo 2) apparterrà a queste.

Definizione 1.3 (po-fibrazione)**.** Una fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ è detta po-fibrazione (il prefisso 'po-' sta per 'partially ordered') se ogni fibra $\mathbb{E}^A$ con A in $\mathbb{B}$ è un ordine parziale. In particolare, nella categoria $\mathbb{E}^A$ presi due qualsiasi oggetti X, Y esiste al più una freccia tra di essi e non ci sono isomorfismi diversi dalle identità.

Definizione 1.4 (c-fibrazione)**.** Una fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ è detta c-fibrazione (il prefisso 'c-' sta per coerente) se:

- $\mathbb{B}$ ha prodotti finiti;
- per ogni A in $\mathbb{B}$, la categoria $\mathbb{E}^A$ ha prodotti finiti e coprodotti finiti soddisfanti la legge distributiva (cioè per ogni X, Y e Z la freccia canonica $(X \times Z) + (Y \times Z) \to (X + Y) \times Z$ è un isomorfismo);
- ogni funtore pullback conserva i prodotti finiti e i coprodotti finiti;
- per ogni proiezione prodotto $\pi : C \times B \to B$ in $\mathbb{B}$ esiste l'aggiunto sinistro Σ_π di π^* soddisfante la reciprocità di Frobenius e la condizione di Beck-Chevalley rispetto ad ogni quadrato commutativo come in (4), in cui anche π' è una proiezione prodotto.

$$\begin{tikzcd} C \times B \arrow[r, "\pi"] & B \\ C \times B' \arrow[u, "id_C \times b"] \arrow[r, "\pi'"'] & B' \arrow[u, "b"'] \end{tikzcd} \quad (4)$$

Chiameremo c-po-fibrazione una fibrazione che appartiene ad entrambe le classi sopra descritte. Inoltre in una po-fibrazione, dati due oggetti X, Y in una stessa fibra, indicheremo con la scrittura $X \leq_f Y$ l'esistenza di $X \to Y$ sopra f e con $X \leq Y$ l'esistenza di una qualche freccia $X \to Y$.

Come da prassi in matematica, una volta introdotte le fibrazioni, definiamo un concetto di mappa che preservi la loro struttura. Questo porta alla nozione di morfismo di fibrazioni. In realtà si potrebbe dimostrare che, prendendo come frecce i morfismi di seguito definiti, la classe delle fibrazioni costituisce una categoria.

Definizione 1.5 (morfismo tra fibrazioni e c-morfismo)**.**

- Siano date due fibrazioni $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e $q : \mathbb{F} \to \mathbb{D}$. Un morfismo tra queste è una coppia di funtori $\Phi : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, $F : \mathbb{B} \to \mathbb{D}$ tali che $Fp = q\Phi$ e Φ manda frecce cartesiane sopra f in $\mathbb{E}$ in frecce cartesiane sopra Ff in $\mathbb{F}$.

- Siano date due c-fibrazioni $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e $q : \mathbb{F} \to \mathbb{D}$. Un c-morfismo tra queste è un morfismo (Φ, F) tra le due fibrazioni in cui i due funtori preservano la struttura di c-fibrazione. In particolare questo significa che:

  a) F preserva i prodotti finiti;

  b) per ogni A in $\mathbb{B}$, il funtore indotto $\Phi^A : \mathbb{E}^A \to \mathbb{F}^{FA}$ preserva i prodotti e i coprodotti finiti;

  c) Φ manda frecce cocartesiane sopra le proiezioni prodotto in frecce cocartesiane;

Cerchiamo di comprendere meglio le definizioni precedenti. Sia $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$ e $f^* : \mathbb{E}^B \to \mathbb{E}^A$. Il morfismo (Φ, F) genera un funtore $\Phi(f^*) : \Phi(\mathbb{E}^A) \to \Phi(\mathbb{E}^B)$ che, dove definito, presenta le caratteristiche che qualificano il funtore pullback F_f^*. Grazie al Teorema 1.4, tale considerazione, applicata al fatto che Φ preserva le frecce cocartesiane ed F i prodotti, è utile per mostrare che, se f è una proiezione prodotto e $\Sigma_f \dashv f^*$, allora c'è un isomorfismo canonico tra $\Phi(\mathbb{E}^B)(\Phi(\Sigma_f X), \Phi Y) \cong \Phi(\mathbb{E}^A)(\Phi(X), \Phi(f^*Y))$ che soddisfa le condizioni di naturalità imposte. Questo comporta che $\Phi(\Sigma_f X) \dashv \Phi(f^*)$, ovvero $\Sigma_{F(f)}\Phi(X) \dashv F(f)^*$.

2 Cenni di logica categoriale

2.1 Logica tipata

Prima di analizzare come rappresentare in termini categoriali le relazioni logiche che possono sussistere tra proposizioni, occorrono alcuni cenni di logica tipata. L'approccio che seguiremo può essere racchiuso nella seguente massima: "una logica è sempre una logica sopra una teoria dei tipi". Il significato che attribuiamo ad un insieme di simboli dipende essenzialmente dal significato che diamo ai simboli stessi. Per questo motivo una scrittura del tipo $x < succ(x)$ non racchiude nessuna informazione se privata di un contesto. Essa invece diventa una proposizione se ad esempio diciamo che x è una variabile che può assumere valori in $\mathbb{N}$.

Cerchiamo di formalizzare quanto detto precedentemente. Supponiamo di avere un linguaggio con un insieme di variabili $\{v_1, v_2, \dots\}$. Una proposizione dovrà essere quindi accompagnata da un *contesto*, ovvero da una dichiarazione finita $\Gamma = v_1 : \sigma_1, \dots, v_n : \sigma_n$ che specifica i tipi abitati dalle variabili che vi occorrono libere. Possiamo assumere senza perdita di generalità che una data formula presenti soltanto le prime variabili nella enumerazione sopra considerata e quindi identificare Γ con l'insieme ordinato $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Introduciamo ora anche il concetto di *segnatura tipata* grazie alla quale potremo parlare di simboli funzionali. Essa viene indicata di solito con la lettera Σ e consiste di una coppia (T, F) dove T è un insieme di tipi e F è una mappa $T^* \times T \to \mathbf{Set}$ che associa ad ogni $n-$upla di tipi $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ e ad un tipo τ un insieme di simboli funzionali che prendono in input abitanti di $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ e restituiscono in output un elemento in τ. Denoteremo T con $|\Sigma|$.

Quanto succede per i simboli funzionali accade per quelli predicativi. Una *segnatura tipata con predicati* è costituita da una coppia (Σ, Π) con Σ una segnatura tipata e Π una funzione $T^* \to \mathbf{Set}$ che ad ogni sequenza del tipo $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ associa un insieme di simboli predicativi che risultano definiti su elementi in input di quel tipo.

In ogni ambito in cui è possibile sviluppare una logica, abbiamo bisogno di un criterio per distinguere formule ben formate e formule mal formate. Necessiteremo quindi di regole *ad hoc* per maneggiare le prime e per regolare la loro costruzione. Sebbene **Prop** non costituisca un tipo, con abuso di linguaggio, scriveremo $\Gamma \mid \varphi : \mathbf{Prop}$ (o più semplicemente Γ, φ) per indicare che φ è una formula ben formata nel contesto Γ. La specifica del contesto è essenziale in scritture di questo tipo poiché Γ non è altro che una lista di variabili in cui appaiono quelle libere in φ con i loro tipi. Le regole che governano la buona formazione di una formula derivano da una generalizzazione di quelle usate nella logica non tipata. In particolare tra queste regole trovano posto anche quelle che qualificano a proposizione formule nate da composizioni tramite operatori logici di due proposizioni. È utile sottolineare una differenza sostanziale tra quelle riguardanti gli operatori del calcolo proposizionale e quelle dei quantificatori. Ad esempio le regole per $\wedge$ ed $\exists$ sono le seguenti:

$$\frac{\Gamma \mid \varphi : \mathbf{Prop} \qquad \Gamma \mid \psi : \mathbf{Prop}}{\Gamma \mid \varphi \wedge \psi : \mathbf{Prop}} \qquad\qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \mid \varphi : \mathbf{Prop}}{\Gamma \mid \exists x : \sigma\varphi : \mathbf{Prop}}$$

Nel caso di $\wedge$ il contesto rimane immutato, mentre in $\exists$ questo non accade. Tale fatto già suggerisce un qualcosa che sarà più chiaro nel seguito: i quantificatori non saranno interpretati a livello categoriale nello stesso modo in cui lo sono gli operatori del calcolo proposizionale, in quanto prevedono una modifica di contesto.

Oltre alle regole precedentemente accennate, abbiamo bisogno anche di regole di deduzione. Esse derivano da quelle previste dal calcolo dei sequenti con opportune modifiche atte a trattare la presenza di contesti. Tratteremo con espressioni del tipo $\Gamma \mid \psi \vdash \phi$ per indicare che il sequente $\psi \vdash \phi$ vive nel contesto Γ. Scriveremo $\mathcal{A} \rhd \Gamma \mid \psi \vdash \varphi$ per indicare che il sequente $\psi \vdash \varphi$ risulta derivabile nel contesto Γ dagli assiomi di $\mathcal{A}$ e infine $\rhd\, \Gamma \mid \psi \vdash \varphi$ per indicare che esiste una derivazione del sequente precedente senza assunzioni. Osserviamo che i sequenti che abbiamo definito e con cui lavoreremo presentano solo una formula al conseguente, in accordo con quanto previsto dal calcolo usuale per la logica intuizionistica. Nell'antecedente in teoria, potrebbero comparire anche più formule ma è possibile dimostrare che, se Θ è un insieme di formule, il sequente $\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi$ è derivabile se e solo se lo è $\Gamma \mid \bigwedge \Theta \vdash \varphi$. Non sarà riduttivo quindi analizzare solo il caso in cui all'antecedente e al conseguente compaiono una sola formula. Useremo, per chiarezza, lettere greche maiuscole per indicare un insieme di proposizioni (Θ, Ψ, Φ) o contesti $(\Gamma, \Delta, \Lambda)$ e lettere greche minuscole $(\varphi, \psi, \vartheta)$ invece per indicare una singola formula. Ricordiamo infine che tratteremo soltanto il frammento coerente della logica del primo ordine, ovvero quello che prevede solo le regole logiche riguardanti $\wedge, \vee, \bot, \top$ e $\exists$. Nel seguito assumeremo che quanto detto precedentemente circa la derivabilità di sequenti avvenga in tale ambito, ovvero soltanto per mezzo delle leggi che elenchiamo di seguito.

Regole di contesto

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi}{\Gamma, x : \sigma \mid \Theta \vdash \psi}\,\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\Gamma, x : \sigma, y : \sigma \mid \Theta \vdash \psi}{\Gamma, x : \sigma \mid \Theta\{y/x\} \vdash \psi\{y/x\}}\,\mathbf{C}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma, y : \tau, \Gamma' \mid \Theta \vdash \psi}{\Gamma, y : \tau, x : \sigma, \Gamma' \mid \Theta \vdash \psi}\,\mathbf{S}$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma \mid \psi : \mathbf{Prop}}{\Gamma \mid \psi \vdash \psi}\,\mathbf{Id.} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \qquad \Gamma \mid \Theta', \varphi \vdash \psi}{\Gamma \mid \Theta, \Theta' \vdash \psi}\,\mathbf{T}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi \qquad \Gamma \mid \varphi : \mathbf{Prop}}{\Gamma \mid \Theta, \varphi \vdash \psi}\,\mathbf{W} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta, \varphi, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma \mid \Theta \vdash \varphi}{\Gamma \mid \Theta, \varphi \vdash \psi}\,\mathbf{C}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta, \varphi, \chi, \Theta' \vdash \psi}{\Gamma \mid \Theta, \chi, \varphi, \Theta' \vdash \psi}\,\mathbf{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Delta, x : \sigma, \Delta' \mid \Theta\{x/M\} \vdash \psi}{\Delta, \Gamma, \Delta' \mid \Theta\{x/M\} \vdash \psi\{x/M\}}$$

Regole logiche

$$\frac{}{\Gamma \mid \Theta \vdash \top} \qquad \frac{}{\Gamma \mid \bot \vdash \psi}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \qquad \Gamma \mid \Theta \vdash \psi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \wedge \psi}\,\wedge\ \mathbf{:I} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi}\,\wedge_1\ \mathbf{:E}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi}\,\wedge_2\ \mathbf{:E} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma \mid \Theta, \psi \vdash \chi}{\Gamma \mid \Theta, \varphi \vee \psi \vdash \chi}\,\vee_1\ \mathbf{:I}$$

$$\frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \vee \psi}\,\vee_2\ \mathbf{:I} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta \vdash \psi}{\Gamma \mid \Theta \vdash \varphi \vee \psi}\,\vee_3\ \mathbf{:I}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \mid \Theta, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \mid \Theta, \exists x : \sigma\varphi \vdash \psi}\,\exists\ \mathbf{:I} \qquad \frac{\Gamma \mid \Theta, \exists x : \sigma\varphi \vdash \psi}{\Gamma, x : \sigma \mid \Theta, \varphi \vdash \psi}\,\exists\ \mathbf{:E}$$

2.2 Fibrazione di Lindenbaum-Tarski: sintassi e deducibilità

Un ultimo lavoro che deve esser fatto è quello di capire come possono essere visti i termini di un linguaggio in un contesto categoriale come quello in cui ci stiamo muovendo. Supponiamo di avere un termine M che, analogamente al caso delle formule, possiamo assumere avere le prime n variabili nella enumerazione $\{v_1, v_2, \dots\}$. Inoltre sia $\Gamma = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ un contesto per cui $M : \tau$. Tale termine può essere visto come una freccia che prende in input elementi dei tipi $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ e restituisce un abitante di τ. Questo approccio porta alla seguente definizione.

Definizione 2.1 (Categoria classificante (o modello dei termini))**.**
Sia Σ una segnatura tipata. Definiamo la categoria $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ con oggetti i contesti di Σ. Un morfismo tra Γ e $\Delta = v_1 : \tau_1, \dots, v_n : \tau_n$ è una n-upla di termini $M_1, \dots, M_n$ tali che $\Gamma \vdash M_i : \tau_i$.

Si dimostra facilmente che $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ è effettivamente una categoria. Dato il contesto $\Gamma = v_1 : \sigma_1, \dots, v_n : \sigma_n$, l'identità su Γ non è altro che la n- upla $(v_1, \dots, v_n)$; l'associatività dei morfismi discende da opportuni lemmi di sostituzione. Osserviamo inoltre che fissata Σ, la categoria classificante $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$

ammette i prodotti finiti. In particolare consideriamo Γ e Δ come sopra. Dalla proprietà universale del prodotto segue che $\Gamma \times \Delta = \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_m$, ovvero la concatenazione dei due contesti, da leggersi come $v_1 : \sigma_1, \ldots, v_n : \sigma_n, v_{n+1} : \sigma_{n+1}, \ldots, v_{n+m} : \sigma_{n+m}$.

Abbiamo finalmente preparato tutto il necessario per poter introdurre la fibrazione di Lindenbaum-Tarski per il frammento coerente della logica del primo ordine. Data una teoria $\mathbb{T}$, definiamo la categoria totale $\mathscr{L}_{\mathbb{T}}(\Sigma)$ nella maniera seguente.

Definizione 2.2. $\mathscr{L}_{\mathbb{T}}(\Sigma)$ è la categoria avente:

- **oggetti:** classi di equivalenza del tipo $(\Gamma, [\varphi])$ con Γ contesto in cui compaiono le variabili libere di φ. Due sequenti $\Gamma \mid \varphi$ e $\Gamma \mid \psi$ sono equivalenti se e solo se sono equivalenti logicamente nella teoria $\mathbb{T}$, ovvero se sono derivabili in $\mathbb{T}$ i sequenti $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ e $\Gamma \mid \psi \vdash \varphi$;

- **morfismi:** un morfismo tra $(\Gamma, [\varphi])$ e $(\Gamma', [\psi])$ è un morfismo di contesti $\vec{M} : \Gamma \to \Gamma'$ tale che da $\mathbb{T}$ è derivabile il sequente $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi\{\vec{v}/\vec{M}\}$ nella logica coerente. L'identità è la freccia derivante dall'identità tra contesti; la composizione tra due morfismi è la freccia derivante dalla composizione tra le due mappe nei contesti.

Si può dimostrare che la posizione sopra è corretta e definisce effettivamente una categoria. Quando $\mathbb{T} = \emptyset$ indicheremo la categoria sopra $\mathscr{L}(\Sigma)$. Non è restrittivo supporre di lavorare in quest'ultimo caso. È necessario passare al quoziente per la relazione di equivalenza logica per dotare la fibrazione di una struttura di poset. Questo passaggio è però del tutto corretto e non comporta alcun problema. In particolare l'esistenza di una deduzione $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ garantisce l'esistenza anche di una deduzione di $\Gamma \mid \varphi' \vdash \psi'$ per qualsiasi φ' e ψ' rispettivamente nelle classi di φ e di ψ. Questo ci permette di scrivere ad esempio $\triangleright\ \Gamma \mid [\varphi] \vdash [\psi]$ per indicare che $\triangleright\ \Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ o equivalentemente che per ogni $\varphi' \in [\varphi]$ e $\psi' \in [\psi]$ è derivabile il sequente $\Gamma \mid \varphi' \vdash \psi'$.

Il funtore $\ell : \mathscr{L}(\Sigma) \to \mathcal{C}\ell(\Sigma)$, che ad un oggetto $(\Gamma, [\varphi])$ associa il contesto Γ e ad una freccia il $\mathscr{L}(\Sigma)$ il morfismo corrispondente tra i contesti, definisce una fibrazione con proprietà notevoli che saranno utilizzate in seguito.

Teorema 2.1. *Il funtore $\ell : \mathscr{L}(\Sigma) \to \mathcal{C}\ell(\Sigma)$ definisce una po-fibrazione.*

Dimostrazione. Nel seguito assumeremo che $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$, $\Delta = (y_1 : \tau_1, \ldots, y_m : \tau_m)$ e $\Lambda = (w_1 : \rho_1, \ldots, w_p : \rho_p)$

Iniziamo col dimostrare che ℓ è una fibrazione, ovvero che data una freccia $\vec{M} = (M_1, \ldots, M_m) : \Gamma \to \Delta$ in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ e fissato $(\Delta, [\varphi])$, esiste una freccia cartesiana con questo codominio sopra $\vec{M}$. Sia $f : (\Gamma, [\varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{x})\}]) \to (\Delta, [\varphi])$.

Una tale freccia esiste poiché è derivabile il sequente $\Gamma \mid \varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{x})\} \vdash \varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{x})\}$. Dimostriamo che tale freccia è cartesiana. Sia dato un morfismo $u : (\Lambda, [\psi]) \to (\Delta, [\varphi])$, ovvero esiste $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)$ in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ tale che:

- è derivabile il sequente $\Lambda \mid \psi \vdash \varphi\{\vec{y}/\vec{N}(\vec{w})\}$;
- si fattorizza lungo il morfismo $\vec{M}$ in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$, ovvero esiste $\vec{P} : \Lambda \to \Gamma$ con $N_i(w_1, \dots, w_p) = M_i(P_1(w_1, \dots, w_p), \dots, P_n(w_1, \dots, w_p))$ per ogni i da 1 a n.

Per provare la cartesianità di f dobbiamo mostrare che esiste un'unica freccia $v : (\Lambda, [\psi]) \to (\Gamma, [\varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{x})\}])$ sopra $\vec{P}$ tale che $fv = u$. L'esistenza di un tale morfismo va provata dimostrando che è derivabile il sequente $\Lambda \mid \psi \vdash (\varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{x})\})\{\vec{x}/\vec{P}(\vec{w})\}$. Dalle ipotesi sulla fattorizzazione del morfismo $\vec{N}$, questo corrisponde a $\Lambda \mid \psi \vdash \varphi\{\vec{y}/\vec{N}(\vec{w})\}$ e la derivabilità del sequente è garantita dall'esistenza della freccia $u : (\Lambda, [\psi]) \to (\Delta, [\varphi])$.

Osserviamo infine che fissato un morfismo $\vec{M}$ in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ e due oggetti A, B in $\mathscr{L}(\Sigma)$ esiste al più un'unica freccia sopra $\vec{M}$ con A, B rispettivamente dominio e codominio, dipendentemente dal fatto che un dato sequente sia derivabile o meno. Questo dimostra non solo l'unicità della freccia f di cui sopra, ma anche la struttura di poset delle fibre. Infatti dato Γ in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$, nella categoria $\mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$ una freccia tra due oggetti è un morfismo verticale sopra id_Γ. Tra due oggetti distinti $(\Gamma, [\varphi])$ e $(\Gamma, [\psi])$ non può esserci più di una freccia visto che se fossero derivabili i sequenti $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ e $\Gamma \mid \psi \vdash \varphi$, allora $\varphi \in [\psi]$ e i due oggetti considerati sarebbero in realtà lo stesso. $\square$

Premettiamo al teorema centrale del capitolo la seguente osservazione.

Osservazione 2.1. Dato $\Gamma \in \mathcal{C}\ell(\Sigma)$, la fibra $\mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$ ha come oggetti tutte e sole le classi di equivalenza di formule ben formate nel contesto Γ. L'ordine in tale categoria è quello dettato dalla derivabilità, ovvero $(\Gamma, [\varphi]) \leq (\Gamma, [\psi])$ se e solo se è derivabile il sequente $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$.

Teorema 2.2. *La fibrazione $\ell : \mathscr{L}(\Sigma) \to \mathcal{C}\ell(\Sigma)$ definisce una c-po-fibrazione.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, ℓ è una po-fibrazione. Ora dimostriamo che essa è anche coerente.

- **la categoria base ammette prodotti finiti**
  È stato già osservato che $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ ammette prodotti finiti.
- **ogni fibra ammette prodotti e coprodotti finiti che soddisfano la legge distributiva**

Fissiamo Γ contesto e consideriamo la fibra $\mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$. Questa categoria ammette oggetto finale $(\Gamma, [\top])$ e oggetto iniziale $(\Gamma, [\bot])$. L'esistenza dei prodotti e coprodotti finiti equivale quindi a dimostrare quella dei prodotti e coprodotti binari. Siano pertanto $(\Gamma, [\varphi])$ e $(\Gamma, [\psi])$ due oggetti di $\mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$.

- L'oggetto $(\Gamma, [\varphi \wedge \psi])$ è il loro prodotto. Esso è dominio di due frecce verso gli oggetti considerati. Inoltre se esistono morfismi $(\Gamma, [\vartheta]) \to (\Gamma, [\varphi])$ e $(\Gamma, [\vartheta]) \to (\Gamma, [\psi])$, significa che nel contesto Γ è derivabile $\psi \wedge \varphi$ da ϑ. Allora esiste la freccia $(\Gamma, \vartheta) \to (\Gamma, \varphi \wedge \psi)$.
- L'oggetto $(\Gamma, [\varphi \vee \psi])$ è il loro coprodotto. Esso è codominio di frecce che partono dagli oggetti considerati. Inoltre se esistono morfismi $(\Gamma, [\varphi]) \to (\Gamma, [\vartheta])$ e $(\Gamma, [\psi]) \to (\Gamma, [\vartheta])$, significa che per sia solo da φ che solo da ψ è possibile derivare ϑ. Allora è sicuramente possibile derivare ϑ dalla loro disgiunzione.

Infine è noto dal calcolo logico proposizionale che la disgiunzione e la congiunzione soddisfano la legge distributiva (Cfr. Appendice).

- **ogni funtore pullback preserva prodotti e coprodotti finiti**
  Dato $\vec{M} : \Gamma \to \Delta$, a meno di isomorfismi naturali, possiamo considerare come funtore pullback $\vec{M}^* : \mathscr{L}(\Sigma)^\Delta \to \mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$ che manda l'oggetto $(\Delta, [\varphi])$ in $(\Gamma, [\varphi\{\vec{M}(\vec{x})/\vec{y}\}])$, ovvero ha l'effetto logico di una sostituzione simultanea di termini. Questa commuta con l'operazione di congiunzione o disgiunzione e pertanto tale funtore preserva prodotti e coprodotti finiti.

- **esiste l'aggiunto sinistro per ogni proiezione prodotto**
  Sia $\pi : \Gamma\Delta \to \Gamma$ una proiezione prodotto in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$. Allora $\pi^* : \mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma \to \mathscr{L}(\Sigma)^{\Gamma\Delta}$ ha come aggiunto sinistro $\Sigma_\pi : \mathscr{L}(\Sigma)^{\Gamma\Delta} \to \mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$ che a $(\Gamma\Delta, [\varphi])$ associa $(\Gamma, [\exists y_1 : \tau_1, \ldots, \exists y_m : \tau_m \varphi])$. L'aggiunzione deriva dal fatto che canonicamente

$$\mathscr{L}(\Sigma)((\Sigma_\pi(\Gamma\Delta, [\varphi])), (\Gamma, [\psi])) \cong \mathscr{L}(\Sigma)((\Gamma\Delta, [\varphi]), (\pi^*(\Gamma, [\psi]))).$$

  Da un punto di vista della logica, quanto sopra detto equivale a dire che

$$\rhd\ \Gamma \mid \exists y_1 : \tau_1, \ldots, \exists y_m : \tau_m\ \varphi \vdash \psi \quad \text{se e solo se} \quad \rhd\ \Gamma\Delta \mid \varphi \vdash \psi$$

  Notiamo che poiché ψ appare anche solo nel contesto Γ, in essa non occorrono libere le variabili y_i. Fatta questa osservazione è facile dimostrare la doppia implicazione da cui discende la validità della tesi.

- **l'aggiunto Σ_π soddisfa la condizione di Beck-Chevalley**
  La condizione di Beck-Chevalley deve essere soddisfatta per i quadrati come in figura (4). Pertanto consideriamo il quadrato commutativo in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$

$$\begin{tikzcd} \Gamma\Delta \arrow[r, "\pi_1"] & \Delta \\ \Gamma\Delta' \arrow[u, "id_\Gamma \times \vec{M}"] \arrow[r, "\pi_2"'] & \Delta' \arrow[u, "\vec{M}"'] \end{tikzcd} \quad (5).$$

  Dobbiamo mostrare ora che la canonica trasformazione naturale $\eta : \Sigma_{\pi_2}(id_\Gamma \times \vec{M})^* \Rightarrow (\vec{M})^*\Sigma_{\pi_1}$ è un isomorfismo. Consideriamo un oggetto $(\Gamma\Delta, [\varphi])$ in $\mathscr{L}(\Sigma)^{\Gamma\Delta}$. Allora

$$\begin{aligned} \Sigma_{\pi_2}(id_\Gamma \times \vec{M})^*(\Gamma\Delta, [\varphi]) &= \Sigma_{\pi_2}(\Gamma\Delta', [\varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{w})\}]) \\ &= (\Delta', [\exists x_1 : \sigma_1 \ldots, \exists x_n : \sigma_n\ \varphi\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{w})\}]) \\ (\vec{M})^*\Sigma_{\pi_1}(\Gamma\Delta, [\varphi]) &= (\vec{M})^*(\Delta, [\exists x_1 : \sigma_1 \ldots, \exists x_n : \sigma_n\ \varphi)] \\ &= (\Delta', [(\exists x_1 : \sigma_1 \ldots, \exists x_n : \sigma_n\ \varphi)\{\vec{y}/\vec{M}(\vec{w})\}]) \end{aligned}$$

  Per le proprietà logiche della sostituzione, i due oggetti in $\mathscr{L}(\Sigma)^{\Delta'}$ sono identici. Questo conduce facilmente alla costruzione dell'inversa di η e quindi alla dimostrazione della nostra tesi.

- **l'aggiunto Σ_π soddisfa la reciprocità di Frobenius**
  Consideriamo $\pi : \Gamma\Delta \to \Gamma$ e gli oggetti $(\Gamma\Delta, [\varphi])$ e $(\Gamma, [\psi])$. La freccia canonica della reciprocità di Frobenius è

$$\begin{aligned} &z : \Sigma_\pi(\pi^*(\Gamma, [\psi]) \times (\Gamma\Delta, [\varphi])) \to (\Gamma, [\psi]) \times \Sigma_\pi(\Gamma\Delta, [\varphi]), \quad \text{ovvero} \\ &z : (\Gamma, [\exists y_1 : \tau_1 \ldots \exists y_m : \tau_m \psi \wedge \varphi]) \to \\ &\qquad\qquad \to (\Gamma, [\psi \wedge \exists y_1 : \tau_1 \ldots \exists y_m : \tau_m \varphi]). \end{aligned}$$

  Considerando che ψ appare nel contesto Γ, nei suoi elementi non occorrono $y_1, \ldots, y_m$ come variabili libere. Questo ci permette di concludere che il morfismo z è in realtà un isomorfismo, visto che nel contesto Γ, da $\psi \wedge \exists y_1 : \tau_1 \ldots \exists y_m : \tau_m \varphi$ può essere dedotto $\exists y_1 : \tau_1 \ldots \exists y_m : \tau_m \psi \wedge \varphi$.

$\square$

Osserviamo che il secondo punto della dimostrazione precedente poteva essere semplificato notando che $\mathscr{L}(\Sigma)^\Gamma$ ha la struttura di reticolo distributivo limitato e quindi il prodotto di due elementi è il loro estremo inferiore e il coprodotto il loro estremo superiore.

Nel seguito, per evidenti motivi, nella fibrazione $\ell : \mathscr{L}(\Sigma) \to \mathcal{C}\ell(\Sigma)$ il prodotto tra due oggetti $(\Gamma, [\varphi])$ e $(\Gamma, [\psi])$ potrà essere indicato con il simbolo $\wedge$ e il coprodotto con $\vee$.

2.3 Semantica funtoriale

Nella sezione precedente abbiamo visto la fibrazione in cui può essere rappresentato un frammento della logica del primo ordine. Per un'interpretazione algebrico-categoriale di teoremi classici come quello di correttezza o di completezza, è necessario definire un modello.

Inizialmente ci occuperemo di interpretare i termini. A differenza delle strutture insiemistiche per la logica non tipata, qui bisognerà anche trattare in maniera diversa tipi diversi. Un'idea potrebbe essere quella di creare un insieme di riferimento per ogni tipo che verrà considerato e questo è quello che essenzialmente verrà fatto. Sia Σ una segnatura con $T = |\Sigma|$ l'insieme dei tipi corrispondente. Un modello per Σ consiste di una collezione di insiemi $(A_\sigma)_{\sigma \in \tau}$ e una funzione $[[-]]$ che ad ogni simbolo funzionale $f : \sigma_1, \dots, \sigma_n \to \sigma_{n+1}$ associa una funzione $[[f]] : A_{\sigma_1} \times \dots \times A_{\sigma_n} \to A_{\sigma_{n+1}}$. Per poter intepretare tutti i termini però abbiamo bisogno di qualcosa di più. Supponendo per semplicità di lavorare in un linguaggio che non presenta parametri o costanti ma solo variabili tipate $(X_\sigma)_{\sigma \in \tau}$, è necessario anche un insieme di funzioni $(\rho_\sigma : X_\sigma \to A_\sigma)_{\sigma \in \tau}$. Avendo a disposizione la terna $(A_\sigma, [[-]], \rho_\sigma)$ riusciamo effettivamente a definire una mappa I che va dai termini del linguaggio ad oggetti della struttura creata. Una descrizione ricorsiva di questa viene data da quanto segue:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \rho_\sigma(x) \qquad \text{per } x : X_\sigma \\ f(t_1, \dots, t_n) &\mapsto [[f]](I(t_1), \dots, I(t_n)), \end{aligned}$$

dove $f : \sigma_1, \dots, \sigma_n \to \sigma_{n+1}$ e $t_1 : \sigma_1, \dots, t_n : \sigma_n$.

Proponiamo ora un modo diverso ma equivalente per concepire un modello ma che presenta notevoli vantaggi, uno fra tutti quello di generalizzare la semantica anche fuori dal contesto insiemistico. L'assegnazione di un insieme per ogni tipo può essere vista come una mappa $\mathcal{C}\ell(\Sigma) \to \mathbf{Set}$. Questa funzione deve avere delle proprietà aggiuntive, dettate dal fatto che ad un morfismo tra due tipi in $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ deve corrispondere un morfismo in $\mathbf{Set}$ tra gli insiemi con cui vengono interpretati gli oggetti di $\mathcal{C}\ell(\Sigma)$ associati. Un'altra caratteristica richiesta, per quanto detto precedentemente, è che il tipo $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sia mandato nel prodotto cartesiano degli insiemi immagine dei vari σ_i. Queste due considerazioni ci avvicinano alla definizione seguente di struttura insiemistica per una segnatura Σ.

Definizione 2.3. Sia Σ una segnatura tipata e $\mathbb{B}$ una categoria che ammette prodotti finiti. Un modello di Σ in $\mathbb{B}$ è un funtore $\mathcal{M} : \mathcal{C}\ell(\Sigma) \to \mathbb{B}$ che preserva i prodotti finiti.

Come nel caso delle strutture non tipate, possiamo definire anche in questo caso morfismi tra strutture. Adottando la definizione sopra, questi si traducono in trasformazioni naturali tra funtori.

Ci occupiamo adesso di intepretare i simboli relazionali. Questo viene fatto cercando di generalizzare il concetto di modello visto nella definizione 2.3, ovvero definendolo come un morfismo tra la fibrazione della logica e un'altra fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$. In quest'ottica, data una segnatura con predicati (Σ, Π) e un morfismo che preserva prodotti $\mathcal{M} : \mathcal{C}\ell(\Sigma) \to \mathbb{B}$, per ogni simbolo $P : \sigma_1, \dots, \sigma_n$ in Π, dobbiamo definire un oggetto in $\mathbb{E}$ sopra $\mathcal{M}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \cong \mathcal{M}(\sigma_1) \times \dots \mathcal{M}(\sigma_n)$. Questo argomento, insieme alla considerazione che il lettore troverà dopo l'enunciato del Teorema 3.3, motivano la prossima definizione.

Definizione 2.4. Siano (Σ, Π) una segnatura tipata con predicati e $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una c-po-fibrazione. Un'interpretazione di (Σ, Π) in p è un morfismo di c-fibrazioni

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}(\Sigma, \Pi) \arrow[r, "\mathscr{N}"] \arrow[d, "\ell"'] & \mathbb{E} \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{C}\ell(\Sigma) \arrow[r, "\mathcal{M}"] & \mathbb{B}
\end{tikzcd} \quad (6).$$

Il dato della fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e del c-morfismo $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ come sopra definisce una struttura per la logica coerente. Un sequente $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ è soddisfatto nella struttura $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ se $\mathcal{N}(\Gamma, [\varphi]) \leq \mathcal{N}(\Gamma, [\psi])$. $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ è una struttura per una teoria $\mathbb{T}$ se soddisfa tutti i seguenti in $\mathbb{T}$.

Notiamo che nel caso in cui $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ è un modello per $\mathbb{T}$ in $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$, allora tale c-morfismo può essere usato per costruirne uno tra la fibrazione $\ell_{\mathbb{T}} : \mathscr{L}_{\mathbb{T}}(\Sigma, \Pi) \to \mathcal{C}\ell(\Sigma)$ e p.

Osservazione 2.2. Osserviamo che nella definizione di struttura è richiesto che $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sia un c-morfismo e la fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ sia coerente. Questo serve per poter estendere l'interpretazione dei simboli relazionali (e quindi delle formule atomiche) ad un'interpretazione di tutte le formule del linguaggio. Così facendo infatti $\mathcal{N}$ conserverà i prodotti finiti, i coprodotti finiti e rispetterà le condizioni richieste per l'aggiunto sinistro dei funtori pullback delle proiezioni prodotto. In particolare si avrà

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\Gamma, [\top]) &\cong \mathbf{1}_{\mathbb{E}^{\mathcal{M}(\Gamma)}};\\
\mathcal{N}(\Gamma, [\bot]) &\cong \mathbf{0}_{\mathbb{E}^{\mathcal{M}(\Gamma)}};\\
\mathcal{N}(\Gamma, [\varphi \wedge \psi]) &\cong \mathcal{N}(\Gamma, [\varphi]) \times_{\mathbb{E}^{\mathcal{M}(\Gamma)}} \mathcal{N}(\Gamma, [\psi]);\\
\mathcal{N}(\Gamma, [\varphi \vee \psi]) &\cong \mathcal{N}(\Gamma, [\varphi]) +_{\mathbb{E}^{\mathcal{M}(\Gamma)}} \mathcal{N}(\Gamma, [\psi]);\\
\mathcal{N}(\Gamma, [\exists x : \sigma\varphi]) &\cong \Sigma_{\mathcal{M}(\pi)}(\mathcal{N}(\Gamma\ x : \sigma, [\varphi])),
\end{aligned}$$

dove π è la proiezione prodotto $\Gamma\sigma \to \Gamma$ in $\mathbb{B}$.

2.4 Teorema di correttezza

Concludiamo il capitolo dimostrando a livello algebrico-categoriale il teorema di correttezza per il frammento coerente della logica.

Teorema 2.3 (Teorema di Correttezza)**.** *Sia* (Σ, Π) *una segnatura tipata e* $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ *una struttura come nella definizione 2.4. Se il sequente* $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ *è derivabile nella logica coerente, allora è soddisfatto da* $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$*.*

Dimostrazione. Il sequente $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ è derivabile se e solo se $(\Gamma, [\varphi]) \leq (\Gamma, [\psi])$ in $\mathscr{L}(\Sigma)$. Tale freccia viene mandata da $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ in un morfismo $\mathcal{N}(\Gamma, [\varphi]) \to \mathcal{N}(\Gamma, [\psi])$ in $\mathbb{E}$, testimone della validità della disuguaglianza voluta. $\square$

Notiamo che il teorema precedente in realtà dimostra anche una forma, seppur tautologica, della completezza. In effetti è facilmente dimostrabile che se per ogni modello $(\mathcal{M}, \mathcal{N}) : \ell \to p$ vale $N(X) \leq N(Y)$, allora $X \leq Y$. Basta considerare a tal proposito il modello $id_\ell : \ell \to \ell$ e la disuguaglianza fornita dall'ipotesi in questo caso diventa quella che prova la tesi.

3 Teorema di Completezza di Gödel

3.1 Enunciato e primi lemmi preparatori

Nel seguente capitolo dimostreremo l'analogo categoriale del teorema di completezza di Gödel per il frammento coerente della logica del primo ordine. Prima di presentare l'enunciato avremo bisogno delle seguenti definizioni.

Definizione 3.1. Un funtore $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ è detto conservativo se riflette gli isomorfismi, ovvero se per ogni freccia f in $\mathbb{A}$, se $F(f)$ è un isomorfismo, allora lo è anche f. Un morfismo di fibrazioni è detto conservativo se induce funtori conservativi tra le fibre.

Osserviamo che se le categorie $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ della definizione sopra sono poset, allora F è conservativo se e solo se è iniettivo.

Lemma 3.1. *Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ due categorie poset che ammettono estremo inferiore per ogni coppia di oggetti. Sia $F : \mathbb{A} \to B$ un funtore che li preserva (ovvero $F(A_1 \wedge A_2) = F(A_1) \wedge F(A_2)$ per ogni A_1 e A_2). Allora F è iniettivo se e solo se $F(A_1) \leq F(A_2)$ implica $A_1 \leq A_2$.*

Dimostrazione. Supponiamo F iniettivo e sia $F(A_1) \leq F(A_2)$. Allora abbiamo che $F(A_1) \wedge F(A_2) = F(A_1)$ e poiché F conserva l'estremo inferiore, $F(A_1 \wedge A_2) = F(A_1)$. Per l'iniettività di F, si ha $A_1 = A_1 \wedge A_2$ ovvero $A_1 \leq A_2$.

Siano A_1 e A_2 tale che $F(A_1) = F(A_2)$. In particolare $F(A_1) \leq F(A_2)$ e $F(A_2) \leq F(A_1)$ e quindi per ipotesi $A_1 \leq A_2$ e $A_2 \leq A_1$. Da tali disuguaglianze segue che $A_1 = A_2$ ovvero, data la generalità di A_1 e A_2, F è iniettivo. □

Con una formulazione del tutto equivalente, dal lemma precedente otteniamo il seguente corollario.

Corollario 3.2. *Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ due categorie poset con prodotti binari e $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtore che li preserva. Allora F è conservativo se e solo se $F(A_1) \leq F(A_2)$ implica $A_1 \leq A_2$ per ogni A_1 e A_2.*

Analogamente si può mostrare che se (M, L) è un morfismo di po-fibrazioni, allora esso è conservativo se e solo se presi qualsiasi due oggetti nella stessa fibra X_1, X_2, $MX_1 \leq MX_2$ implica $X_1 \leq X_2$. Enunciamo adesso il teorema di completezza, per il frammento coerente, in termini categoriali.

Teorema 3.3 (Completezza). *Sia data una c-fibrazione $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ con $\mathbb{B}$ categoria piccola. Siano inoltre $f : A \to B$ in $\mathbb{B}$, $X \in \mathbb{E}^A$ e $Y \in \mathbb{E}^B$. Se per* *ogni* $(M, L) : p \to \text{Pred}(\mathbf{Set})$ *c-morfismo si ha che* $M(X) \leq_{Lf} M(Y)$*, allora* $X \leq_f Y$*. Equivalentemente, per arbitrari* B *in* $\mathbb{B}$ *e* X, Y *in* $\mathbb{E}^B$*, se* $X \nleq Y$ *allora esiste un c-morfismo* $(M, L) : p \to \text{Pred}(\mathbf{Set})$ *tale che* $M(X) \nleq M(Y)$*.*

Per comprendere meglio l'enunciato, conviene fare un'osservazione.

Osservazione 3.1. A differenza del Teorema 2.4 che, come già detto, dimostra una forma tautologica del teorema di completezza, quello che verrà analizzato in questo capitolo si concentra su una sottoclasse di modelli, quelli che possono effettivamente essere messi in corrispondenza con le strutture insiemistiche. Il discorso che apre la sezione sulla semantica categoriale ci permette già di cogliere il nesso tra modelli insiemistici e funtori che conservano i prodotti $\mathcal{C}\ell(\Sigma) \to \mathbf{Set}$. Volendo estendere il concetto ai predicati, ci accorgiamo che la cosa più naturale che può essere fatta è quella di considerare la fibrazione Pred. Nella semantica insiemistica infatti, ad ogni simbolo predicativo P sopra il tipo $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ associamo un sottoinsieme di $A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}$ dove A_{σ_i} è l'insieme in cui viene interpretato il tipo σ_i. Questo è quello che accade anche dal punto di vista categoriale considerando la fibrazione dei predicati. L'analogia tra i due concetti di semantica si estende anche al caso dell'intepretazioni di formule più complesse di quelle atomiche. Mostriamo un esempio per chiarire meglio ciò. Supponiamo di avere $\Gamma \mid p(x_1, \ldots, x_n)$ e $\Gamma \mid q(x_1, \ldots, x_n)$ e siano B_p e B_q i sottoinsiemi di $A_{\sigma_1} \times \cdots \times A_{\sigma_n}$ che indicano in un determinato modello insiemistico per quali valori delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ i sequenti sopra considerati sono validi. Allora nella semantica insiemistica la formula $\Gamma \mid p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n)$ verrà considerata valida per quei valori di $x_1, \ldots, x_n$ in cui entrambi i congiunti sono validi e cioè in $B_p \cap B_q$. Nel caso della semantica categoriale, considerando il modello associato a quello insiemistico, il sequente sarà valido se la sua immagine tramite $\mathcal{N}$ sarà codominio di una freccia con dominio $N(\Gamma, [\top])$. Per le proprietà di c-morfismo ed osservando che il prodotto nelle fibre è l'intersezione si ha

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\Gamma, [p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n)]) \cong \\
&\cong \mathcal{N}(\Gamma, [p(x_1, \ldots, x_n)]) \times \mathcal{N}(\Gamma, [q(x_1, \ldots, x_n)]) \\
&\cong \mathcal{N}(\Gamma, [p(x_1, \ldots, x_n)]) \cap \mathcal{N}(\Gamma, [q(x_1, \ldots, x_n)]),
\end{aligned}$$

in pieno accordo con quanto previsto dalla semantica insiemistica.

Tutto il capitolo sarà volto alla dimostrazione del Teorema 3.3. Iniziamo con alcune notazioni e definizioni che useremo in seguito.

Definizione 3.2. Siano $\mathbf{t}$ e $\mathbf{f}$ rispettivamente l'oggetto finale e iniziale della fibra sopra l'oggetto terminale in $\mathbb{B}$ e sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una c-fibrazione. Essa soddisfa

- *la* $\vee-$*proprietà* o *proprietà disgiuntiva* se per ogni X, Y in $\mathbb{E}^{\mathbf{1}_\mathbb{B}}$,

$$\mathbf{t} \leq X + Y \quad \text{implica} \quad \mathbf{t} \leq X \text{ o } \mathbf{t} \leq Y.$$

- *la* $\exists-$*proprietà* o *proprietà esistenziale* se per ogni B in $\mathbb{B}$ e X in $\mathbb{E}^B$, se $\mathbf{t} \leq \Sigma_{!_B} X$, allora esiste $b : \mathbf{1}_\mathbb{B} \to B$ con $\mathbf{t} \leq b^* X$.

Supponiamo $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ sia una po-fibrazione. Allora il simbolo di $\leq$ può essere sostituito con $\cong$, dato che $\mathbf{t}$ è l'elemento finale. Diremo inoltre che X ha *supporto globale* se $\Sigma_{!_B} X \cong \mathbf{t}$ e che $b : \mathbf{1}_B \to \mathbb{B}$ è un suo *elemento globale* se $b^* X = \mathbf{t}$. La proprietà esistenziale nel caso delle po-fibrazioni quindi si traduce nel dire che se X ha supporto globale, allora possiede anche un elemento globale.

Queste due proprietà sono soddisfatte dalla fibrazione della logica coerente (visto che il calcolo dei sequenti intuizionistico presenta tali caratteristiche). Esse inoltre sono state introdotte per motivi tecnici come illustra il seguente teorema.

Teorema 3.4. *Sia* $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ *una c-po-fibrazione con la* $\vee$*-proprietà e la* $\exists$*-proprietà in cui* $\mathbf{f} \neq \mathbf{t}$*. Allora la categoria* $\mathrm{c}[p, \mathrm{Pred}(\mathbf{Set})]$ *dei c-morfismi tra le due fibrazioni non è vuota.*

Per dimostrarlo abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 3.5. *Consideriamo una categoria localmente piccola* $\mathbb{B}$*. Sia con* $\mathrm{Car}(\mathbb{B}, \mathbf{Set})$ *la categoria avente come oggetti i funtori da* $\mathbb{B}$ *a* $\mathbf{Set}$ *cartesiani (ovvero che preservano i prodotti finiti) e come frecce trasformazioni naturali fra di essi. Se* $\mathbb{B}$ *ammette oggetto terminale* $\mathbf{1}_\mathbb{B}$*, allora* $L = \mathbb{B}(\mathbf{1}_\mathbb{B}, -)$ *è l'oggetto iniziale di* $\mathrm{Car}(\mathbb{B}, \mathbf{Set})$.

Dimostrazione. La cartesianità di L è garantita dal fatto che tutti i rappresentabili sono continui (Cfr. [4]). Il fatto che sia oggetto iniziale deriva dal Lemma di Yoneda in quanto se F è un altro funtore di $\mathrm{Car}(\mathbb{B}, \mathbf{Set})$, si ha

$$\mathrm{nat}(\mathbb{B}(\mathbf{1}_\mathbb{B}, F) \cong F(\mathbf{1}_\mathbb{B}) \cong \mathbf{1}_{\mathbf{Set}}.$$

Questo significa che esiste un'unica freccia da $\mathbb{B}(\mathbf{1}_\mathbb{B}, -) \to F$ in $\mathrm{Car}(\mathbb{B}, \mathbf{Set})$ e cioè che il rappresentabile è oggetto iniziale. $\square$

Dimostrazione. (Teorema 3.4)
Consideriamo il morfismo $(L, M) : p \to \mathrm{Pred}(\mathbf{Set})$ definito come segue. L è il funtore $\mathbb{B} \to \mathbf{Set}$ del Lemma 3.5. Dato un oggetto X in $\mathbb{E}$ sopra B in $\mathbb{B}$, $M(X)$ è il sottoinsieme di $L(B)$ costituito dalle frecce $b : \mathbf{1}_\mathbb{B} \to B$ tali che $b^*(X) = \mathbf{t}$.

Sui morfismi M si comporta come L visto che questo preserva gli elementi globali di ogni oggetto. Supponiamo infatti di avere una freccia $z : X \to Y$ in $\mathbb{E}$ sopra $f : A \to B$. L'esistenza di f^* garantisce che $X \leq f^*(Y)$ (per cartesianità di $\gamma_Y : f^*(Y) \to Y$). Sia ora $a \in LA = \mathbb{B}(\mathbf{1}_{\mathbb{B}}, A)$ e $b = fa$. Allora

$$a^*(X) \leq a^*(f^*(Y)) \cong (fa)^*(Y) = b^*(Y).$$

Se $a \in M(X)$, allora $a^*X = \mathbf{t}$ e quindi per la disuguaglianza sopra e considerando che $\mathbf{t}$ è oggetto terminale, si ha anche $b^*Y = \mathbf{t}$, ovvero $b \in M(Y)$. Quindi possiamo definire $M(z) = L(f)$. Tale definizione è corretta e inoltre M è effettivamente un funtore. Dimostriamo ora che è un c-morfismo di fibrazioni:

- **Verifica la condizione di commutatività**
  Dato X sopra A, si verifica facilmente che $LA = \text{Pred}(\mathbf{Set})(M(X))$. Per quanto riguarda le frecce, data $z : X \to Y$ sopra $f : A \to B$, $L(f) = \text{Pred}(M(z))$ per come è stato definito M.

- **Manda frecce cartesiane in frecce cartesiane**

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "z"] & Y \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \xrightarrow{(M,L)} \begin{tikzcd} U \arrow[dr, dotted, "\exists!"'] \arrow[drr, "r"] & & \\ & MX \arrow[r, "M(z)"'] & MY \\ & LA \arrow[r, "L(f)"] & LB \\ D \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "g=L(f)h"'] & & \end{tikzcd}$$

  Sia $z : X \to Y$ cartesiana sopra $f : A \to B$ e sia $r : U \to MY$ sopra $g : D \to LB$, tale che esiste $h : D \to LA$ con $g = L(f)h$. Dato $u \in U$ devo trovare un elemento a in MX tale che $r(u) = Mz(a)$. Visto che $\text{Pred}(\mathbf{Set})(r) = g$ si fattorizza lungo $L(f)$ e $MY \subseteq LB$, si ha che $r(u)$ è della forma fa per qualche $a \in LA$, con $(fa)^*Y = \mathbf{t}$. Dimostriamo che $a \in MX$. Osserviamo che, data la cartesianità di z, per l'Osservazione 1.1.a), $f^*(Y) \cong X$. Da cui, $\mathbf{t} = (fa)^*(Y) = a^*(f^*(Y)) \cong a^*(X)$. Allora possiamo definire $v : U \to MX$ che ad un elemento $u \in U$ associa a come sopra. Questo morfismo è effettivamente sopra h e fa commutare il triangolo voluto. Tale freccia è unica per l'osservazione fatta quanto è stata introdotta la fibrazione Pred.

- **Il funtore indotto da M tra le fibre preserva i prodotti finiti**
  Siano X_1, X_2 due oggetti di $\mathbb{E}^A$ e sia $a \in M(X_1 \wedge X_2)$. Allora $a^*(X_1 \wedge$

$X_2) = \mathbf{t}$ e per definizione di prodotto quindi esistono anche frecce $\mathbf{t} \to a^*(X_1)$ e $\mathbf{t} \to a^*(X_2)$, ovvero $a \in M(X_1)$ e $a \in M(X_2)$. D'altra parte supponendo che $a \in M(X_1)$ e $a \in M(X_2)$, per la proprietà universale di prodotto, esiste una freccia $\mathbf{t} \to a^*(X_1) \wedge a^*(X_2) \cong a^*(X_1 \wedge X_2)$. Abbiamo provato quindi che $M(X_1 \wedge X_2) \cong M(X_1) \cap M(X_2)$, cioè la tesi.

Spostando il discorso sugli oggetti terminali, osserviamo che nella fibra dell'oggetto $\mathbf{1}_{\mathbb{B}}$, tale elemento è $\mathbf{t}$ e viene mandato da M in $\{*\}$, oggetto terminale di **Set**. Sia A un oggetto in $\mathbb{B}$ e $\mathbf{1}_A$ l'oggetto finale della fibra $\mathbb{E}^A$. Considerando che i funtori pullback preservano gli oggetti terminali e per quanto scritto successivamente alla Definizione 1.5 $!_A^*(\mathbf{t}) = \mathbf{1}_A$ e quindi

$$M(\mathbf{1}_A) \cong M(!_A^*(\mathbf{t})) \cong L(!_A)^*(\mathbf{t}) \cong \mathbf{t}.$$

- **Il funtore indotto da M tra le fibre preserva i coprodotti finiti**
  Siano X_1, X_2 due oggetti di $\mathbb{E}^A$ e sia $a \in M(X_1)$. Per definizione di $M(X_1)$ esiste una freccia $\mathbf{t} \to a^*(X_1)$ e per una proprietà del coprodotto quindi esiste una freccia $\mathbf{t} \to a^*(X_1) \vee a^*(X_2) \cong a^*(X_1 \vee X_2)$, dove l'ultimo isomorfismo deriva dal fatto che i funtori pullback preservano i coprodotti. Questo significa che $a^*(X_1 \vee X_2) \cong \mathbf{t}$ e pertanto è possibile costruire, con un ragionamento analogo per $a \in M(X_2)$, due morfismi $M(X_1) \to M(X_1 \vee X_2)$ e $M(X_2) \to M(X_1 \vee X_2)$. Dimostriamo ora la validità della proprietà universale. Sia Z un oggetto di $\mathbf{P}(\mathbf{Set})$ codominio di due frecce aventi come dominio rispettivamente $M(X_1)$ e $M(X_2)$. Per come è definito $\mathbf{P}(\mathbf{Set})$, l'esistenza di tali frecce implica che $M(X_1) \cup M(X_2) \subseteq Z$. Per la $\vee-$proprietà, preso $a \in M(X_1 \vee X_2)$, $a \in M(X_1)$ o $a \in M(X_2)$ e quindi in qualsiasi caso $a \in Z$. Il morfismo così definito $M(X_1 \vee X_2) \to Z$ presenta le caratteristiche volute e prova che il funtore indotto preserva i coprodotti binari. Mostriamo ora che l'oggetto iniziale viene conservato. Visto che i funtori pullback preservano i coprodotti finiti, preserva anche l'oggetto iniziale e pertanto $!_{\mathbf{1}_{\mathbb{B}}}^*(\mathbf{f}) \cong \mathbf{f} \neq \mathbf{t}$. Da ciò si deduce che $M(\mathbf{f}) = \emptyset$. Dato ora A oggetto di $\mathbb{B}$ si avrà, sempre per la proprietà sopra detta dei funtori pullback, $!_A(\mathbf{f}) \cong \mathbf{0}_A$. Quindi per la considerazione seguente alla Definizione 1.5 si ha la tesi
  $$M(\mathbf{0}_A) \cong M(!_A^*(\mathbf{f})) \cong L(!_A)^*(\mathbf{f}) = \emptyset.$$

- **Manda frecce cocartesiane sopra le proiezioni prodotto in frecce cocartesiane**
  Sia $f : A \times B \to B$ una proiezione prodotto in $\mathbb{B}$ e sia X sopra $A \times B$.

Inizialmente mostriamo che $L(f) : MX \to M(\Sigma_f X)$ è suriettiva. Sia $b \in M(\Sigma_f X)$. Consideriamo il diagramma commutativo seguente:

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "f"] & B \\
A \cong A \times \mathbf{1}_{\mathbb{B}} \arrow[u, "id_A \times b"] \arrow[r, "!_A"'] & \mathbf{1}_{\mathbb{B}} \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd} .
$$

Per la condizione di Beck-Chevalley, $\mathbf{t} \cong b^*(\Sigma_f X) \cong \Sigma_{!_A}(id_A \times b)^* X$. Per l'$\exists$−proprietà, esiste $a : \mathbf{1}_{\mathbb{B}} \to A$ tale che $a^*(id_A \times b)^* X \cong \mathbf{t}$. Chiamando $c := (id_A \times b)a : \mathbf{1}_{\mathbb{B}} \to A \times B$, si ha che $c^* X = \mathbf{t}$, ovvero che $c \in M(X)$. Inoltre, data la commutatività del diagramma precedente,

$$Lf(c) = fc = f(id_A \times b)a = b\ !_A\ a = b.$$

Sia $z : X \to Y$ una freccia cocartesiana e $\delta : X \to \Sigma_f X$ il morfismo cocartesiano canonico. Allora esiste un isomorfismo $Y \cong \Sigma_f X$. Pertanto, visto che abbiamo provato che $M(\delta) : MX \to M(\Sigma_f X)$ è suriettiva, lo sarà anche $Mz : MX \to MY$. Consideriamo $\rho : MX \to U$ la cui immagine tramite Pred si fattorizza come in figura.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & U & & \\
X \arrow[r, "z"] & Y & & & & MX \arrow[ul, "\rho"'] \arrow[r, "Mz"] & MY \\
 & & {} \arrow[r, "{(M,L)}"] & {} & & & \\
A \times B \arrow[r, "f"] & B & & & & L(A \times B) \arrow[dl, "\mathscr{P}\rho"'] \arrow[r, "Lf"] & LB \arrow[dll, "g"] \\
 & & & & C & &
\end{tikzcd}
$$

Dato $y \in MY$, sia $x \in Mz^{-1}(y)$ e creiamo la mappa $MY \to U$ che a y associa $\rho(x)$. Tale definizione è corretta, infatti supponendo che esistano x_1 e x_2 tali che $Mz(x_1) = Mz(x_2) = y$, allora $Lf(x_1) = Lf(x_2)$ e infine $\text{Pred}(\rho)(x_1) = gLf(x_1) = gLf(x_2) = \text{Pred}(\rho)(x_2)$. Pertanto $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.

$\square$

3.2 Slice Category p/X e la sottocategoria $p//X$

Introduciamo ora una costruzione canonica che sarà fondamentale nella dimostrazione del Teorema 3.3.

Sia $\mathbb{B}$ una categoria e A un suo oggetto. Possiamo costruire la slice-category $\mathbb{B}/A$ avente come oggetti frecce $B \to A$ in $\mathbb{B}$ e un morfismo tra $g : B \to A$ e $h : C \to A$ è un morfismo $f : B \to C$ in $\mathbb{B}$ tale che $fg = h$. Preso ora un funtore $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e X in $\mathbb{E}$ un oggetto sopra A, possiamo considerare il funtore associato $p/X : \mathbb{E}/X \to \mathbb{B}/A$. Disponiamo inoltre di due funtori dimenticanti $\Phi : \mathbb{E}/X \to \mathbb{E}$ e $F : \mathbb{B}/A \to A$. Entrambi mandano le frecce di $\mathbb{E}/X$ o $\mathbb{B}/A$ nei loro domini e si comportano come l'identità con i morfismi.

Il seguente lemma mostra come p/X sia effettivamente una fibrazione (nel caso in cui p lo sia) e come le frecce cartesiane possano essere "create" in modo canonico dimenticandosi i codomini degli oggetti considerati, ovvero analizzandone le immagini tramite i funtori dimenticanti.

Definizione 3.3. Sia (Φ, F) un morfismo tra $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e $q : \mathbb{E}' \to \mathbb{B}'$. Esso "crea" frecce cartesiane se per ogni morfismo g in $\mathbb{B}$ e per ogni freccia cartesiana f sopra $F(g)$, esiste $\bar{f}$ in $\mathbb{E}$ sopra g tale che $\Phi(\bar{f}) = f$.

Lemma 3.6. *Se $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ è una fibrazione, anche il funtore $p/X : \mathbb{E}/X \to \mathbb{B}/A$, dove $A = pX$, lo è. In aggiunta i funtori dimenticanti costituiscono un morfismo tra fibrazioni.*

Dimostrazione. Siano $b : B \to A$ e $c : C \to A$ due oggetti in $\mathbb{B}/A$, $f : B \to C$ una freccia tra di essi e $z : Z \to X$ un oggetto sopra c. Poiché p è una fibrazione, esiste una freccia cartesiana $u : Y \to Z$ sopra f. Inoltre esiste la mappa $y = zu : Y \to X$. Dimostriamo che tale u è cartesiana anche in $\mathbb{E}/X$. Sia infatti $v : U \to X$ dominio di una freccia q verso z (ovvero $q : U \to Z$ e $zq = v$). Chiamiamo, con abuso di notazione, l'immagine di q e di v tramite il funtore p/X $p(q)$ e $p(v)$. Supponiamo quindi che $p(q) : (D \to A) \to (C \to A)$ si fattorizzi lungo f tramite $g : (D \to A) \to (B \to A)$ (ovvero $p(q) = fg$ e $p(v) = cp(q) = bg$). Per cartesianità di u esiste un'unica freccia $s : U \to Y$ sopra g tale che $us = q$. Tale morfismo può essere esteso in $\mathbb{E}/X$ visto che $ys = zus = v$. Le ultime uguaglianze seguono combinandone alcune precedentemente trovate: in particolare $us = q$ e $zq = v$.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[dr, dotted, "\exists! s"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "zu=y"] & Z \arrow[dl, "z"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad \xrightarrow{p/X} \qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "p(q)"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "p(v)"'] & & \\
& B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[dl, "c"] \\
& A &
\end{tikzcd}
.
$$

□

La dimostrazione sopra fornita può essere estesa per provare anche i primi due punti del lemma successivo che racchiude in sé il precedente. L'affermazione riguardante l'oggetto terminale discende invece dalla cartesianità della freccia $f^*(X) \to X$.

Lemma 3.7. *Consideriamo le fibrazioni $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ e $p/X : \mathbb{E}/X \to \mathbb{B}/A$ e il funtore dimenticante (Φ, F).*

- *Il morfismo (Φ, F) "crea" frecce cartesiane, ovvero dimenticandoci di X e di A, la freccia cartesiana corrispondente in p può essere estesa ad una freccia cartesiana in p/X;*
- *Il morfismo (Φ, F) "crea" oggetti iniziali, coprodotti binari e prodotti binari nelle fibre;*
- *L'oggetto terminale nella fibra sopra $f : B \to A$ in p/X, è la freccia cartesiana $\gamma_X^f : f^*X \to X$.*

Per quanto segue, avremo bisogno di assumere che $\mathbb{B}$ e le fibre di p ammettano prodotti binari e che i funtori pullback li preservino, proprietà garantite ad esempio se parliamo di una c-fibrazione. Imponendo tali condizioni riusciamo a definire un morfismo $(\Delta, D) : p \to p/X$ come segue:

- $D : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/A$
  - **oggetti** B in $\mathbb{B}$ viene mandato in $B \times A \to A$;
  - **morfismi** Un morfismo $f : B \to C$ definisce una mappa $f \times id_A : B \times A \to C \times A$ che effettivamente è un morfismo in $\mathbb{B}/A$ visto che fa commutare il triangolo voluto
- $\Delta : \mathbb{E} \to \mathbb{E}/X$
  - **oggetti** Dato Y sopra B, consideriamo in $\mathbb{B}$ le proiezioni prodotto $\pi_B : B \times A \to B$ e $\pi_A : B \times A \to A$ e i loro funtori pullback. Allora definiamo l'immagine di Y come $Y \dot{\times} X = \pi_B^*(Y) \times \pi_A^*(X)$, oggetto sopra $A \times B$.
  - **morfismi** Osserviamo prima che la proprietà universale del prodotto si estende (con alcune precisazioni) anche se consideriamo oggetti fuori dalla fibra in cui ci troviamo. Siano dati Y e Z sopra C, $f : B \to C$ e W sopra B, dominio delle funzioni $y : W \to Y$ e $z : W \to Z$ sopra f. Chiamando π_Y e π_Z le proiezioni prodotto di $Y \times Z$ rispettivamente in Y e in Z, esiste un'unica freccia $w : W \to Y \times Z$ tale che $\pi_Y w = y$ e

$\pi_Z w = z$. La dimostrazione dell'esistenza segue considerando la cartesianità delle frecce $\gamma_Y : f^*(Y) \to Y$ e $\gamma_Z : f^*(Z) \to Z$ che inducono i morfismi $W \to f^*(Y)$ e $W \to f^*(Z)$ e quindi $W \to f^*(Y \times Z)$. Componendolo con la freccia cartesiana $\gamma_{Y\times Z} : f^*(Y \times Z) \cong f^*(Y) \times f^*(Z) \to Y \times Z$ si ottiene quanto desiderato. Per quanto riguarda l'unicità, essa segue dall' Osservazione 1.1 applicata a quest'ultima freccia.

Dato ora un morfismo $u : Y \to Z$ sopra $f : B \to C$, devo trovare una freccia

$$\pi_B^*(Y) \times \pi_A^*(X) = Y \dot{\times} X \to Z \dot{\times} X = \pi_C^*(Z) \times \pi'_A * (X)$$

sopra $f \times id_A$, dove i nomi delle funzioni in questione vengono chiarite nei seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} B \times A \arrow[r, "f\times id_A"] \arrow[d, "\pi_B"'] & C \times A \arrow[d, "\pi_C"] \\ B \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd} \quad (7) \qquad\qquad \begin{tikzcd} B \times A \arrow[r, "f\times id_A"] \arrow[d, "\pi_A"'] & C \times A \arrow[d, "\pi'_A"] \\ A \arrow[r, "id_A"'] & A \end{tikzcd} \quad (8).$$

La cartesianità della freccia $\pi_C^*(Z) \to Z$ e l'esistenza di $u : Y \to Z$, creano un'unica $Y \to \pi_C^*(Z)$ che composta con il morfismo cartesiano $\pi_B^*(Y) \to Y$ definisce una freccia $\pi_B^*(Y) \to \pi_C^*(Z)$. Considerando il diagramma (8), invece di (7), con un ragionamento analogo otteniamo una freccia $\pi_A^*(X) \to \pi_A'^*(X)$. La mappa cercata $u\dot{\times}X : Y\dot{\times}X \to Z\dot{\times}X$ viene determinata in base alle considerazioni precedenti e alla proprietà universale del prodotto, visto che le frecce in questione $\pi_B^*(Y) \times \pi_A^*(X) \to \pi_A'^*(X)$ e $\pi_B^*(Y) \times \pi_A^*(X) \to \pi_C^*(Z)$ sono entrambe sopra lo stesso morfismo $f \times id_A$.

Si può mostrare che così definiti, Δ e D sono funtori. Inoltre vale il seguente teorema.

Teorema 3.8. *Sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una fibrazione in cui sia $\mathbb{B}$ che le fibre ammettono prodotti finiti preservati dai funtori pullback. Preso X un oggetto di $\mathbb{E}$ sopra A, consideriamo $\delta = (\Delta, D) : p \to p/X$ definito come sopra. Allora:*

a. δ è un morfismo di fibrazioni;

b. δ conserva i prodotti binari e l'oggetto terminale;

c. Se i coprodotti binari soddisfano la legge distributiva e sono preservati dai funtori pullback, allora δ li conserva; se l'oggetto iniziale è preservato dal funtore pullback, allora δ lo conserva;

d. *Se Σ_f è stabile e soddisfa la reciprocità di Frobenius, δ manda frecce cocartesiane sopra f in frecce cocartesiane.*

Dimostrazione.

a. È facile verificare che il diagramma in figura commuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{E}/X \arrow[d, "p/X"] \\
\mathbb{B} \arrow[r, "D"] & \mathbb{B}/A
\end{tikzcd}.$$

Proviamo ora che δ manda frecce cartesiane in frecce cartesiane. Supponiamo $\gamma_f : Y \to Z$ una freccia cartesiana in p sopra $f : B \to C$ e $\alpha : U \to Z \dot\times X$ in p/X che si fattorizza lungo Df. Con abuso di notazione, per ragioni di chiarezza e praticità, indicheremo un oggetto in p/X solamente con il suo dominio. Attuando tali omissioni indichiamo in figura lo schema che stiamo considerando.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
& Y \dot\times X \arrow[r, "\Delta\gamma_f"'] & Z \dot\times X \\
& B \times A \arrow[r, "Df"] & C \times A \\
E \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "D_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Chiamiamo π_A, π_B le proiezioni di $B \times A$ rispettivamente lungo A e B e analogamente π'_A e π_C le proiezioni di $C \times A$ lungo A e C. Siano inoltre $\gamma_1 : \pi_B^*(Y) \to Y$ e $\gamma_2 : \pi_C^*(Z) \to Z$ le frecce cartesiane che nascono dai funtori pullback. Il morfismo $\gamma_f\gamma_1 : \pi_B^*(Y) \to Z$ ha immagine tramite p che si fattorizza lungo π_C (poiché $p(\gamma_f\gamma_1) = f\pi_B = \pi_C(f \times id_A)$) e quindi per cartesianità di γ_2 esiste $v : \pi_B^*(Y) \to \pi_C^*(Z)$. Questa freccia è inoltre cartesiana visto che lo sono γ_1, γ_2 e γ_f e verticale. Consideriamo ora il seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
& Y \dot{\times} X \arrow[r, "\Delta\gamma_f"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & Z \dot{\times} X \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\
& \pi_B^*(Y) \arrow[r, "v"] & \pi_C^*(Z)
\end{tikzcd}
$$

dove con ‘pr’ sono indicate le proiezioni prodotto. Per cartesianità di v esiste una freccia $\beta : U \to \pi_B^*(Y)$. tale che $v\beta = \mathrm{pr}\,\alpha$. Visto che v è verticale, le frecce β e $\mathrm{pr}\,\alpha$ sono tutte sopra lo stesso morfismo in $\mathbb{B}$ e quindi per la proprietà universale del prodotto tra fibre, esiste una freccia $U \to Y\dot{\times}X$. Questa soddisfa le proprietà volute e si dimostra facilmente essere unica. Infine è possibile estenderla a morfismo in p/X, da cui la tesi.

b. Dimostriamo che preserva i prodotti binari nelle fibre. Data la funtorialità di Δ, $\Delta(Y \times Z)$ è dominio di due morfismi con codominio $\Delta(Y)$ e $\Delta(Z)$. Assumiamo ora che esista $W \to X$ in p/X per cui esistano $f_1 : W \to Y\dot{\times}X$ e $f_2 : W \to Z\dot{\times}X$. Componendo f_1 ed f_2 con le proiezioni prodotto otteniamo i morfismi $W \to \pi_B^*(Y)$ e $W \to \pi_B^*(Z)$ e per la definizione di prodotto quindi una freccia $W \to \pi_B^*(Y) \times \pi_B^*(Z) \cong \pi_B^*(Y \times Z)$ perché i funtori pullback preservano i prodotti binari. Inoltre esiste anche una freccia canonica $W \to \pi_A^*(X)$ e quindi riutilizzando la proprietà universale di prodotto, esiste la freccia voluta $W \to \pi_B^*(Y \times Z) \times \pi_A^*(X) = \Delta(Y \times Z)$.

d. Sia Y un oggetto sopra B, $f : B \to C$ ed $u : Y \to Z$ una freccia cocartesiana sopra f. Dobbiamo mostrare quindi che $\delta u : Y\dot{\times}X \to Z\dot{\times}X$ è cocartesiana. Osserviamo che per l’Osservazione 1.1 applicata alle frecce cocartesiane, $Z \cong \Sigma_f(Y)$ e inoltre δ_u cartesiana equivale a dimostrare che $Z\dot{\times}X \cong \Sigma_{f\times id_A}(Y\dot{\times}X)$. Fatte tali considerazioni, la tesi quindi equivale a provare che $\Sigma_f(Y)\dot{\times}X \cong \Sigma_{f\times id_A}(Y\dot{\times}X)$. Consideriamo pertanto il seguente diagramma in $\mathbb{B}$

$$
\begin{tikzcd}
B \times A \arrow[rr, "f\times id_A"] \arrow[dr, "\pi_A"] \arrow[dd, "\pi_B"'] & & C \times A \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dd, "\pi_C"] \\
& A & \\
B \arrow[rr, "f"] & & C
\end{tikzcd}
.
$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
\Sigma_{f\times id_A}(Y\dot{\times}X) &\cong \Sigma_{f\times id_A}(\pi_B^*(Y)\times\pi_A^*(X))\\
&\cong \Sigma_{f\times id_A}(\pi_B^*(Y)\times(f\times id_A)*\pi_A'^*(X))\\
&\cong \Sigma_{f\times id_A}(\pi_B^*(Y))\times(\pi_A'^*X)\\
&\cong \pi_A'^*\Sigma_f Y\times\pi_A'^*X\\
&\cong \Sigma_f(Y)\dot{\times}X,
\end{aligned}$$

dove il primo e l'ultimo isomorfismo discendono dalla definizione di $\dot{\times}$, il secondo da $\pi_A'^*(f\times id_A)=\pi_A^*$, il terzo dalla reciprocità di Frobenius e il quarto dalla condizione di stabilità.

$\square$

Data $p:\mathbb{E}\to\mathbb{B}$ una c-po-fibrazione, non è detto che p/X lo sia. Basta osservare infatti che $\mathbb{B}/A$ potrebbe non ammettere prodotti binari (ad esempio non lo fa se $\mathbb{B}$ non ammette pullback). Ci restringiamo così ad una fibrazione più piccola della slice-category che soddisfa le proprietà volute. Per il Teorema 3.8, D conserva i prodotti e quindi possiamo considerare come fibrazione, l'immagine di $\mathbb{B}$ tramite D.

Definizione 3.4. Data $p:\mathbb{E}\to\mathbb{B}$ fibrazione, consideriamo X oggetto in $\mathbb{E}$ sopra A e $D:\mathbb{B}\to\mathbb{B}/A$ funtore come sopra. Definiamo la fibrazione $p//X:\mathbb{E}//X\to D(\mathbb{B})$ avente come categoria base l'immagine di $\mathbb{B}$ tramite D e la categoria totale composta da tutti gli oggetti in $\mathbb{E}/X$ sopra un qualche oggetto di $D(\mathbb{B})$.

È facile dimostrare che effettivamente $p//X$ è una c-po-fibrazione, nel caso in cui p lo sia (Cfr. Corollario 2.6 in [2]).

Vediamo ora, nel caso in cui p sia una c-po-fibrazione, come le proprietà disgiuntiva ed esistenziale siano legate alla conservatività del funtore δ.

Lemma 3.9. *Sia p una c-po-fibrazione.*

- *Sia X sopra A. Se X ha un supporto globale, allora $\delta_X:p\to p//X$ è conservativo;*
- *Siano X_1,X_2 due oggetti sopra $\mathbf{1}_{\mathbb{B}}$ con $X_1+X_2=\mathbf{t}$ e Y,Z due oggetti sopra A con $Y\not\leq Z$. Allora uno tra $\delta_{X_1}:p\to p//X_1$ e $\delta_{X_2}:p\to p//X_2$ è conservativo per Y e Z (cioè $\delta_{X_i}(Y)\not\leq\delta_{X_i}(Z)$);*

Dimostrazione.

- Siano U, V sopra B con $\delta(U) \leq \delta(V)$, ovvero $\pi_B^*(U) \times \pi_A^*(X) \leq \pi_B^*(V) \times \pi_A^*(X)$. L'ipotesi di esistenza del supporto globale per X significa che $\Sigma_{!_A}(X) = \mathbf{t}$, quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\Sigma_{\pi_B}(\delta(U)) &\cong \Sigma_{\pi_B}(\pi_B^*(U) \times \pi_A^*(X)) \cong U \times \Sigma_{\pi_B}(\pi_A^*(X)) \\ &\cong U \times (!_B)^*(\Sigma_{!_A})X \cong U \times (!_B)^*(\mathbf{t}) \\ &\cong U \times \mathbf{1}_{\mathbb{E}^B} \cong U,\end{aligned}$$

dove il secondo isomorfismo deriva dalla reciprocità di Frobenius, il terzo dalla condizione di Beck-Chevalley per il diagramma (9), il quarto dall'esistenza del supporto globale per X e infine il quinto per il fatto che i funtori pullback preservano gli oggetti terminali.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!_B"] & 1 \\ B \times A \arrow[u, "\pi_B"] \arrow[r, "\pi_A"] & A \arrow[u, "!_A"'] \end{tikzcd} \quad (9).$$

Con considerazioni analoghe si mostra che $\Sigma_{\pi_B}(\delta(V)) \cong V$. Dall'ipotesi che $\delta(U) \leq \delta(V)$ segue che $\Sigma_{\pi_B}(\delta(U)) \leq \Sigma_{\pi_B}(\delta(V))$ e quindi $U \leq V$.

- Supponiamo per assurdo che sia $\delta_{X_1}(Y) \leq \delta_{X_1}(Z)$, sia $\delta_{X_2}(Y) \leq \delta_{X_2}(Z)$. Allora segue che $Y \dot{\times} X_1 \leq Z \dot{\times} X_1$ e $Y \dot{\times} X_2 \leq Z \dot{\times} X_2$. Per la proprietà del coprodotto, se $A \leq B$ e $C \leq D$, allora vale anche $A + C \leq B + D$. In particolare

$$(Y \dot{\times} X_1) + (Y \dot{\times} X_2) \leq (Z \dot{\times} X_1) + (Z \dot{\times} X_2).$$

Chiamando $\pi_B : B \times \mathbf{1}_{\mathbb{B}} \to B$, per la legge distributiva questo porta a

$$\begin{aligned}\pi_B^*(Y) &\cong Y \dot{\times} \mathbf{t} \cong Y \dot{\times} (X_1 + X_2) \cong (Y \dot{\times} X_1) + (Y \dot{\times} X_2) \leq \\ &\leq (Z + X_1) \dot{\times} (Z + X_2) \cong Z \dot{\times} (X_1 + X_2) \cong Z \dot{\times} \mathbf{t} \cong \pi_B^*(Z).\end{aligned}$$

Poiché π_B è una proiezione prodotto, esiste l'aggiunto sinistro Σ_{π_B} e si ha pertanto $\Sigma_{\pi_B}\pi_B^*(Y) \leq \Sigma_{\pi_B}\pi_B^*(Z)$. Per la counità dell'aggiunzione si ha quindi anche una freccia $Y \to Z$ contro l'ipotesi $Y \nleq Z$.

□

3.3 Dimostrazione del Teorema di Completezza

Presentiamo ora l'ultimo lemma che ci servirà per la dimostrazione del Teorema 3.3.

Lemma 3.10. *Sia $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ una c-po-fibrazione. Consideriamo un oggetto A in $\mathbb{B}$ e due oggetti X, Y sopra di esso con $X \not\leq Y$. Allora c'è una c-po-fibrazione q in cui vale la $\vee$-proprietà e la $\exists$-proprietà e un c-morfismo $\varphi : p \to q$ tale che $\varphi(X) \not\leq \varphi(Y)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione transfinita. Sia λ un cardinale maggiore di $\aleph_0$ e della cardinalità delle frecce in $\mathbb{E}$ e in $\mathbb{B}$. Chiameremo un ordinale non limite α pari se è della forma $\delta + 2n$ e dispari se della forma $\delta + 2n - 1$ per $n < \omega$ e δ ordinale limite. Consideriamo infine una funzione $\alpha \mapsto \langle \beta_\alpha, \gamma_\alpha \rangle$ con la proprietà che per ogni $\beta, \gamma < \lambda$ c'è almeno un α pari e uno dispari maggiore di β tali che entrambi vengano mandati in $\langle \beta, \gamma \rangle$. Definiremo per ricorsione i seguenti elementi:

- p_α c-po-fibrazione;
- per ogni $\beta \leq \alpha$ un c-morfismo $\varphi_{\beta\alpha} : p_\beta \to p_\alpha$ che soddisfa le seguenti proprietà:
  - $\varphi_{\alpha\alpha} = id_{p_\alpha}$;
  - $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ per ogni $\alpha \leq \beta \leq \gamma$;
  - $\varphi_{0\alpha}X \not\leq \varphi_{0\alpha}Y$.
- per ogni $\alpha \leq \lambda$ un'enumerazione $(Z^\alpha_\gamma \mapsto B^\alpha_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ di tutti gli oggetti di p_α con supporto globale;
- per ogni $\alpha \leq \lambda$ un'enumerazione $(U^\alpha_\gamma, V^\alpha_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ delle coppie di oggetti in p_α sopra $\mathbf{1}_{\mathbb{B}_\alpha}$ tali che $U \vee V = \mathbf{t}$.

Iniziamo ora la definizione per ricorsione.

- $\alpha = 0$
  Poniamo $p_\alpha = p$ e $\varphi_{00} = id_{p_\alpha}$;
- α **successore pari**
  Sia $\alpha = S(\delta)$ e $\langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta_\alpha, \gamma_\alpha \rangle$. Se $\beta \not< \alpha$ allora non facciamo nulla, ovvero poniamo $p_\alpha = p_\delta$, $\varphi_{\alpha\alpha} = id_{p_\alpha}$ e $\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\delta}$ per ogni $\gamma \leq \delta$. Invece se $\beta < \alpha$, consideriamo un oggetto $Z \to C$ con supporto globale nell'enumerazione per β. Per le proprietà di c-morfismo, $\varphi_{\beta\delta}Z$ ha supporto globale in C_δ e per il Lemma 3.9, ponendo $p_\alpha = p_\delta // \varphi_{\beta\delta}Z$, il c-morfismo $\varphi_{\delta\alpha} : p_\delta \to p_\alpha$ è conservativo, ovvero $\varphi_{\delta\alpha}X \not\leq \varphi_{\delta\alpha}Y$. Definiamo poi $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\delta}\varphi_{\delta\alpha}$

- α **successore dispari**
  Si esegue una costruzione simile alla precedente, questa volta però sfruttando il punto 2) del Lemma 3.9 e quindi ponendo p_α o uguale a $p_\delta//U$ o a $p_\delta//V$ in base a quale c-morfismo tra δ_U e δ_V è conservativo.

- α **ordinale limite**
  Consideriamo il diagramma in $\mathbf{Cat}^{\to}$ dettato dalle fibrazioni p_β e dai c-morfismi $\varphi_{\gamma\beta}$ per $\gamma < \beta < \alpha$. Definiamo p_α il colimite di tale diagramma e indichiamo con $\varphi_{\beta\alpha}$ le proiezioni colimite che nascono in questo modo che sono c-morfismi per le proprietà dei colimiti (per l'esistenza di colimiti arbitrari in $\left[\cdot \to \cdot, \mathbf{Cat}\right]$, Cfr.[4]). Poniamo poi per definizione $\varphi_{\alpha\alpha} = id_{p_\alpha}$. Questi c-morfismi così costruiti soddisfano le condizioni richieste sulla composizione e inoltre $\varphi_{0\alpha}X \nleq \varphi_{0\alpha}Y$.

Completata la definizione per ricorsione, ci occupiamo di determinare il morfismo che prova la tesi. Consideriamo il colimite q del diagramma generato dalle fibrazioni $(p_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ e siano $\varphi_{\alpha\lambda}$ i c-morfismi che nascono per definizione di coprodotto $p_\alpha \to q$. Per le proprietà del colimite continuerà a valere $\varphi_{0\lambda}X \nleq \varphi_{0\lambda}Y$. Dimostriamo che q gode dell'$\exists-$proprietà. Sia $W \to D$ un oggetto con supporto globale. Questo sarà l'immagine tramite $\varphi_{\beta\lambda}$ di un oggetto con supporto globale $Z \to C$ in p_β, per un certo $\beta < \lambda$. Per ipotesi esiste un $\alpha > \beta$ pari con $\alpha \mapsto \langle\beta_\alpha, \gamma_\alpha\rangle = \langle\beta, \gamma\rangle$. Dalla definizione per ricorsione data precedentemente, chiamando δ l'ordinale precedente ad α, si ottiene che $p_\alpha = p_\delta//\varphi_{\beta\delta}Z$ e che $\varphi_{\beta\alpha}Z = \varphi_{\delta\alpha}(\varphi_{\beta\delta}Z)$ ha un elemento globale. Da questo si evince che $W = \varphi_{\beta\lambda}(Z) = \varphi_{\alpha\lambda}(\varphi_{\beta\alpha}(Z))$ ha un elemento globale. Per la $\vee$-proprietà si ragiona allo stesso modo, prendendo $\alpha > \beta$ pari. $\square$

Osservazione 3.2. Analizziamo il caso in cui p sia una c-po-fibrazione. L'elemento terminale in $\mathbb{B}/A$ è $id_A : A \to A$ e in $(\mathbb{E}//X)^{\mathbf{1}_\mathbb{B}}$ è $\mathbf{t} = id_X$. Osserviamo che $\delta(X)$ possiede un elemento globale, ovvero esiste $d : \mathbf{1}_{\mathbb{B}/A} \to (A \times A \to A)$ tale che $d^*\delta(X) = \mathbf{t}$. Siano π_1 e π_2 le proiezioni rispettivamente lungo la prima e la seconda componente di $A \times A$ in A. Allora poniamo $d = (id_A, id_A)$. Tale definizione è corretta visto che il triangolo seguente commuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "{d=(id_A,id_A)}"] \arrow[dr, "id_A"'] & & A \times A \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Si hanno inoltre i seguenti isomorfismi (nella scrittura sottostante, con abuso di linguaggio, denotiamo le frecce oggetto di $\mathbb{E}//X$ solo con i loro domini)

$$\begin{aligned} d^*(\delta(X)) &\cong d^*(\pi_1^*(X) \times \pi_2^*(X)) \cong d^*\pi_1^*(X) \times d^*\pi_2^*(X) \\ &\cong id_A^*(X) \times id_A^*(X) \cong X \times X \cong X, \end{aligned}$$

ovvero $d^*(\delta(X)) \cong id_X \cong \mathbf{t}$.

Se Y è un altro oggetto sopra A, allora $d^*(\delta(Y)) \cong d^*(\pi_1^*(X) \times \pi_2^*(Y) \to X) \cong X \times Y \to X$. In particolare, se $X \leq Y$, $X \times Y \cong X$ e quindi $d^*(\delta(Y)) \cong id_X \cong \mathbf{t} \cong d^*(\delta(X))$. D'altro canto, se $d^*(\delta(X)) \leq d^*(\delta(Y))$, allora esiste una freccia $X \to X \times Y$ e quindi $X \leq Y$. Abbiamo mostrato quindi che $X \leq Y$ se e solo se $d^*(\delta(X)) \leq d^*(\delta(Y))$.

Presentiamo infine la dimostrazione dell'analogo categoriale del Teorema di completezza.

Dimostrazione Teorema 3.3.
Consideriamo X ed Y sopra A con $X \nleq Y$. Per l'Osservazione 3.2, $d^*\delta(X) \cong \mathbf{t}$ e, posti $\hat{X} = d^*(\delta(X))$ e $\hat{Y} = d^*(\delta(Y))$, si ha $\hat{X} \nleq \hat{Y}$. Grazie al Lemma 3.10, possiamo costruire una c-po-fibrazione q con la $\vee$-proprietà e la $\exists$-proprietà e un c-morfismo $\varphi : p//X \to q$ con $\varphi(\hat{X}) \nleq \varphi(\hat{Y})$. Notiamo inoltre che in q, $\mathbf{f} \neq \mathbf{t}$ in quanto se oggetto iniziale e finale coincidessero, ogni oggetto sarebbe minore o uguale ad ogni altro e quindi anche $\varphi(\hat{X}) \leq \varphi(\hat{Y})$.

Possiamo applicare ora il Teorema 3.4 ed affermare l'esistenza del morfismo $\mu = (M, L) : q \to \mathrm{Pred}(\mathbf{Set})$. Per come è costruito, $M(\varphi(\hat{Y})) \cong \emptyset$ e $M(\varphi(\hat{X})) \cong \mathbf{1}_{\mathbf{Set}}$. Osserviamo infatti che essendo φ un c-morfismo, induce morfismi nella cateogoria totale e nella base che preservano prodotti e in particolare oggetti terminali. Da questo segue che $\varphi(\hat{X}) \cong \mathbf{t}$, quindi $!^*_{\mathbf{1}_{\mathbb{B}}}(\varphi(\hat{X})) = id^*_{\mathbf{1}_{\mathbb{B}}}(\mathbf{t}) \cong \mathbf{t}$ e pertanto $M(\varphi(\hat{X})) \cong \mathbf{1}_{\mathbf{Set}}$. D'altro canto, $M(\varphi(\hat{Y})) \subseteq L(\mathbf{1}_{\mathbb{B}}) \cong \{*\}$. Se fosse $M(\varphi(\hat{Y})) \cong \{*\}$, significherebbe che l'unica freccia $!_{\mathbf{1}_{\mathbb{B}}} = id_{\mathbf{1}_{\mathbb{B}}} : \mathbf{1}_{\mathbb{B}} \to \mathbf{1}_{\mathbb{B}}$ è tale che $\varphi(\hat{Y}) \cong id^*_{\mathbf{1}_{\mathbb{B}}}(\varphi(\hat{Y})) \cong \mathbf{t}$, contro quanto previsto dal Lemma 3.10 per cui $\mathbf{t} = \varphi(\hat{X}) \nleq \varphi(\hat{Y})$.

Poniamo $(\Phi, F) = \mu\varphi : p//X \to \mathrm{Pred}(\mathbf{Set})$. Per quanto detto precedentemente $\Phi(\hat{X}) \nleq \Phi(\hat{Y})$. Componendo ora con $\delta : p \to p//X$ otteniamo il morfismo desiderato $\Phi\delta : p \to \mathrm{Pred}(\mathbf{Set})$. Per provare la tesi basta verificare che $\Phi(\delta(X)) \nleq \Phi(\delta(Y))$. Supponiamo che valga tale disuguaglianza. Allora varrebbe $F(d)^*(\Phi(\delta(X))) \leq F(d)^*(\Phi(\delta(Y)))$ e quindi

$$\begin{aligned}\Phi(d^*(\delta(X))) \cong \Phi(d^*)(\Phi(\delta(X))) \cong F(d)^*(\Phi(\delta(X))) \leq \\ \leq F(d)^*(\Phi(\delta(Y))) \cong \Phi(d^*(\delta(Y))).\end{aligned}$$

Ricordando infine che $\hat{X} = d^*(\delta(X))$ e $\hat{Y} = d^*(\delta(Y))$, si avrebbe dunque $\Phi(\hat{X}) \leq \Phi(\hat{Y})$, contro quanto dimostrato precedentemente. □

Concludiamo con la dimostrazione del Teorema di Completezza di Gödel che usualmente si incontra in logica.

Teorema 3.11. *(Completezza di Gödel) Se un sequente $\Gamma \mid \varphi \vdash \psi$ è soddisfatto in ogni struttura insiemistica, allora è derivabile.*

Dimostrazione. Per l'Osservazione 3.1, il fatto che il sequente sia soddisfatto in ogni struttura insiemistica è equivalente a dire che ogni c-morfismo $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ tra la fibrazione di Lindenbaum-Tarski e la fibrazione dei predicati in **Set** realizza $\mathcal{N}(\Gamma, [\varphi]) \leq_{id_{\mathcal{M}(\Gamma)}} \mathcal{N}(\Gamma, [\psi])$. Utilizzando il Teorema 3.3 possiamo quindi dimostrare che $(\Gamma, [\varphi]) \leq_{id_\Gamma} (\Gamma, [\psi])$ e quindi per l'Osservazione 2.1 che il sequente in questione è derivabile. $\square$

Appendice: legge distributiva

Posti $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ come segue,

$$\mathscr{D}_1 := \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta}}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \vartheta}}{\Gamma \mid \varphi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \vartheta} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid \varphi \vdash \varphi}}{\Gamma \mid \varphi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \varphi}}{\Gamma \mid \varphi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \varphi \wedge \vartheta}}{\Gamma \mid \varphi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta)}$$

$$\mathscr{D}_2 := \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta}}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \vartheta}}{\Gamma \mid \psi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \vartheta} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid \psi \vdash \psi}}{\Gamma \mid \psi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \psi}}{\Gamma \mid \psi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \psi \wedge \vartheta}}{\Gamma \mid \psi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta)}$$

la derivazione del sequente voluto è

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathscr{D}_1 \qquad\qquad \mathscr{D}_2}{\Gamma \mid \varphi \vee \psi, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta}}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash \varphi \vee \psi}}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta, (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta)}}{\Gamma \mid (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \vdash (\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta)}$$

.

Riferimenti bibliografici

[1] B. Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory.* Elsevier Science B.V., 1999.

[2] M. Makkai, *The Fibrational Formulation of Intuitionistic Predicate Logic I: Completeness according to Gödel, Kripke, and Läuchli.* Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol.34 n.3, 1993.

[3] Tom Leinster, *Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 2014.

[4] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematicians.* Springer-Verlag New York, 1991.